ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK
UND
MATHEMATIK.

Herausgeber:

A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen,

ordentliche Professoren an der k. k. Universität zu Wien.

Zweiter Band.

Mit vier Kupfertafeln.

Wien 1827.

Verlag von J. G. Heubner.

ZEITSCHRIFT

FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Die circuläre Polarisation des Lichtes nach Fresnels Arbeiten dargestellt von A. Baumgartner.

1.

Die Phänomene der Polarisation des Lichtes gehören ohne Zweifel zu den wichtigsten und interessantesten, welche die Naturlehre aufzuweisen im Stande ist, nicht blos desshalb, weil sie dem Forscher einen fast unerschöpflichen Stoff zu theoretischen Betrachtungen und hypothetischen Voraussetzungen über die Natur des Lichtes darbieten, sondern auch, weil sie unzähliger practischer Anwendungen fähig sind, und durch die Farbenpracht und Symmetrie der Bilder selbst dem ästetischen Auge einen innigen Genuss gewähren. So viel man auch bereits durch den regen Eifer deutscher, französischer und englischer Naturforscher in diesem Felde kennen gelernt hat, so ist doch gewiss noch nicht Alles erschöpft, und es muss jede neue Thatsache die Aufmerksamkeit der Naturforscher in An-

spruch nehmen, wenn sie auch für sich nicht besonders wichtig zu seyn scheint, weil sie als ein Glied der endlosen Kette der Naturerscheinungen auf wichtige Wahrheiten leiten kann. Um so mehr verdienen Phänomene allgemein bekannt zu werden, die schon für sich ein neues Feld zu Forschungen eröffnen und uns das Licht gleichsam von einer neuen Seite kennen lehren, wie dieses mit den Erscheinungen der circulären Polarisation der Fall ist. Wiewohl sie Fresnel schon vor längerer Zeit entdeckt und auch in Frankreich bekannt gemacht hatte, so gibt es doch, so viel ich weiss, keine Quelle, aus der ein Deutscher sie kennen lernen könnte: auch hat Fresnel keine nähere Anleitung gegeben, die Versuche hierüber zu machen, wiewohl sie zu den delicateren gehören. Der Umstand, dass Fresnel selbst die Güte hatte, mir diese interessanten Versuche zu zeigen, nebst ihrer Wichtigkeit, veranlasste mich, sie hier mit ihren theoretischen Beziehungen näher auseinander zu setzen.

2.

Ein auf die gewöhnliche Art polarisirter Lichtstrahl hat bekanntlich die Eigenschaft, dass er in einem Doppelspath oder in irgend einem andern Krystall, der das Licht doppelt bricht, nur dann die doppelte Brechung erleidet, wenn der Hauptschnitt des Krystalls weder parallel mit der Polarisationsebene ist, noch auf ihr senkrecht steht, so dass man einen leuchtenden Punct, von welchem polarisirtes Licht ins Auge gelangt, hinter demselben bald einfach, bald doppelt sieht, wenn man den Krystall so dreht, dass sich die

Lage seines Hauptschnittes gegen die Polarisationsebene beständig ändert.

Andererseits weiss man, dass nur ein polarisirter Strahl die Eigenschaft hat, ein Plättchen aus Glimmer, Gips etc., farbig zu zeigen, wenn er durch dasselbe und hierauf durch einen Doppelspath oder einen andern, das Licht doppelt brechenden Krystall ins Auge gelangt. Ein Lichtstrahl also, der in einem Doppelspath stets die doppelte Brechung erleidet, wenn man den Krystall auch um den Strahl, wie um seine Achse dreht, der aber ein Glimmerplättchen farbig zeigt, wenn er durch dasselbe und hierauf durch einen Doppelspath gegangen ist, besitzt einerseits die Eigenschaft eines gewöhnlichen, andererseits die eines polarisirten Strahles. Von der Art fand Fresnel einen Lichtstrahl, der zuerst auf die gewöhnliche Weise polarisirt wurde, und dann in einem Glasprisma zwei totale Reflexionen erlitten hatte, so dass die Reflexionsebene mit der Polarisationsebene einen Winkel von 45° bildet. Er bediente sich zu diesem Behufe eines Instrumentes, das zugleich zur Darstellung der Gesetze der Reflexion, doppelten Brechung und Polarisation im Allgemeinen dient, und in Fig. 1, abgebildet ist. A ist ein verticaler in Grade etc. eingetheilter Kreis, an dessen Mittelpunct zwei Alhidaden a und b so angebracht sind, dass sich jede derselben für sich in der Ebene des Kreises bewegen lässt. An einer derselben ist das Rohr B befestiget, an dessen vom Centrum entfernteren Ende verschiedene Aufsätze, z. B. Polarisationsspiegel, Gläser, Prismen aus Doppelspath etc. etc. angebracht werden können. Eine ähnliche Röhre C ist an der anderen Alhidade angebracht, je-

doch so, dass sie zugleich von ihr in der Ebene des Kreises A entfernt und ihr genähert werden kann, und dabei ihre Achse stets mit der Alhidade parallel bleibt. Dieses wird dadurch erreicht, dass man die Röhre mit der Alhidade mittelst zweier paralleler verschiebbarer Leisten auf dieselbe Weise in Verbindung bringt, wie man es mit den zwei Linealen zu thun pflegt, die sich in den gewöhnlichen Reisszeugen befinden, und Parallellineale genannt werden. Fig. 2. stellt diese Verbindung für sich dar, an der man die Leisten c und d sieht. D ist ein kleiner Tisch, der mittelst der Stellschrauben des Fussgestelles E in eine horizontale Lage gebracht werden kann, und in dessen Ebene der Mittelpunct des Kreises A liegt.

3.

Will man nun mit diesem Instrumente die oben erwähnte Eigenschaft des Lichtes prüfen, so gibt man in die Röhre B ein achromatisirtes Doppelspathprisma, dessen Hauptschnitt mit der Verticalebene einen Winkel von 45° macht, und schliesst übrigens das Rohr mit einem Deckel, der durch eine kleine Oeffnung dem Lichte den Eintritt gestattet, legt auf den Tisch D ein gläsernes Parallelepiped von der Gestalt Fig. 3, so dass die beiden Strahlenbündel, in welche der in B eintretende Strahl durch den Doppelspath getheilt wird, senkrecht auf die erste Fläche e auffallen, in das Glas eindringen, in f und g eine totale Reflexion erleiden und endlich in senkrechter Richtung die letzte Fläche desselben verlassen. Man stellt ferner das zweite Rohr C so, dass die aus dem Parallelepiped kommenden Strahlen nahe die Achse desselben

treffen, und schliesst endlich das Rohr mit einem um dessen Achse beweglichen durchbohrten Deckel, in welchem sich wieder ein Doppelspath befindet, durch welchen das Licht neuerdings gehen muss, um in das hinter der Oeffnung am Deckel befindliche Auge zu gelangen.

Sieht man nun durch das leere Rohr C auf das Glasparallelepiped, so erscheint einem die Oeffnung im Deckel des Rohres B doppelt, wie zu erwarten war. Enthält das Rohr C den Doppelspath, so sieht man hinter demselben diese Oeffnung vierfach, wie auch der Hauptschnitt des Doppelspathes gegen die Polarisationsebene der einfallenden Strahlen geneigt seyn mag, so als wenn diese Strahlen gar nicht polarisirt worden wären, oder ihren Polarisationszustand durch die zweimalige totale Reflexion verloren hätten. Hält man aber auf das Rohr C ein Glimmerplättchen, so dass das Licht nach der zweimaligen Reflexion durch dieses gehen muss, um auf den in C befindlichen Doppelspath gelangen zu können, so erscheinen die vier Bilder der Oeffnung des Deckels in B gefärbt, und die zwei zusammengehörigen Bilder haben conplementäre Farben, wie dieses vom polarisirten Lichte zu erwarten war. Allein die Beschaffenheit der Farben ist nicht dieselbe, als wenn die Lichtstrahlen, ohne die doppelte Reflexion zu erleiden, vom Doppelspath in B durch das Glimmerplättchen auf den Doppelspath in C hätten gelangen können. Von diesen Lichstrahlen sagt nun Fresnel, sie haben die circuläre Polarisation erlitten, um sie von den auf die gewöhnliche Art durch Brechung oder einfache Reflexion polarisirten zu unterschei-

den, von denen er sagt, sie haben die geradlinige Polarisation erlitten.

4.

Es ist für sich klar, dass der Winkel, unter welchem die Fläche e des Parallelepipedes gegen f geneigt seyn muss, von der Natur des Glases abhängt, weil von dieser das Brechungsvermögen desselben bestimmt wird, nach dem sich der Winkel richtet, unter welchem ein Lichtstrahl auffallen muss, um gänzlich reflectirt zu werden. Fresnel, der zu seinen Versuchen Spiegelglas von St. Gobin wählte, gab diesem Winkel $54°\frac{1}{2}$. Auf die erste Fläche muss ein Lichtstrahl stets senkrecht einfallen, um nicht durch Brechung eine Aenderung seines Polarisationszustandes zu erleiden. Auch sieht wohl jeder ein, dass ein Lichtstrahl nicht in jedem auch mit gehörigen Winkeln versehenen Parallelepiped gerade zwei totale Reflexionen erleidet, sondern dass die Anzahl derselben von der Länge des Glaskörpers abhängt. Bei Versuchen mit solchen Glasprismen von verschiedener Länge, in welchen daher ein Lichtstrahl eine verschiedene Anzahl von Reflexionen erleidet, hat Fresnel ein anderes merkwürdiges Verhalten des circulär polarisirten Lichstrahles entdeckt. Er fand nämlich, dass ein solcher Strahl durch zwei neue Reflexionen den Character eines auf die gewöhnliche Art polarisirten wieder erlangt. Wählt man zwei Glasprismen von der angegebenen Art, in deren jedem ein Lichtstrahl vom Eintritt bis zum Austritte zwei totale Reflexionen erleidet, so findet man, dass der im ersten Prisma circulär polarisirte durch

zwei neue Reflexionen selbst dann in die Reihe der geradlinig polarisirten zurückkehrt, wenn auch die Reflexionsebene im zweiten mit der im ersten nicht übereinstimmt.

5.

Ein Glimmerplättchen, welches in dem auf gewöhnliche Art polarisirten Lichte farbig erscheint, nimmt bekanntlich keine andere Farbe an, wenn man es um den Lichtstrahl, wie um seine Achse herumdreht, ohne seine Neigung gegen den Strahl zu ändern, sondern es erscheint bei diesen verschiedenen Stellungen nur mehr oder weniger intensiv gefärbt, so dass es bei einer vollen Umdrehung vier Lagen gibt, in denen es am intensivsten und vier andere, in denen es gar nicht farbig erscheint. Ein Glimmerplättchen, dass ich zwischen 2 im vorhin genannten Apparate angebrachten Glasprismen befindet, die so gestellt sind, dass die Reflexionsebenen des Lichtes in beiden einen rechten Winkel einschliessen, und dessen Brechungsachse mit jeder der beiden Reflexionsebenen einen Winkel von 45° macht, erscheint auch gefärbt, wenn ein polarisirter Strahl dieses System durchdringt und hierauf noch durch einen Doppelspath gehen muss, um ins Auge zu gelangen; allein es findet zwischen jener und dieser Farbenerscheinung der wesentliche Unterschied statt, dass hier die Farbe sich ändert, wenn man den Doppelspath dreht. So lange aber der Hauptschnitt desselben gegen die ursprüngliche Polarisationsebene dieselbe Neigung beibehält, kann man die beiden Glasprismen nebst dem dazwischen liegenden Glim-

merplättchen um den einfallenden Lichstrahl nach Belieben drehen, ohne eine Aenderung der Färbung hervorzubringen. Man sieht daraus, dass die Natur dieser Farbe einzig vom Winkel abhängt, welchen die beiden äussersten Polarisationsebenen mit einander machen.

6.

Bekanntlich zeigt ein Plättchen aus Bergkrystall, das senkrecht auf die Achse der doppelten Brechung geschnitten ist, im polarisirten Lichte dieselben Phänomene der Färbung, wie das genannte Glimmerplättchen zwischen den 2 Glasprismen, ja sogar manche Flüssigkeiten, wie z. B. Terpentinöl, thun dasselbe. Daher muss das Licht beim Durchgang durch ein solches Plättchen oder durch eine Schichte einer solchen Flüssigkeit dieselbe Modification erleiden, wie in den beiden Glasprismen durch die totalen Reflexionen. Fresnel behauptet demnach, ein Lichtstrahl erleide in einem Bergkrystall, den er parallel mit seiner Achse durchdringt, eine eigenthümliche doppelte Brechung.

Um diese an Tag zu legen, schnitt er aus einem Bergkrystall ein dreyseitiges Prisma, dessen brechender Winkel 152° betrug, und dessen zwei Flächen gegen die Achse des Krystalls gleich geneigt waren. Um aber von der Farbenzerstreuung freie Resultate zu bekommen, achromatisirte er dieses Prisma mittelst zweier Glasprismen, die er an der Eintritts- und Austrittsfläche des Strahls ankittete. Er erhielt auf diesem Wege von einem einfachen Strahl wirklich zwei Strahlenbüschel, welche die

vorhin erwähnte Eigenschaft besassen. Allein der auf die genannte Weise erhaltene Achromatismus war nicht so vollkommen, als es zu so delicaten Versuchen erforderlich war. Glücklicherweise kam er auf den wahrhaft genialen Gedanken, den Bergkrystall gleichsam durch sich selbst zu achromatisiren. Er wählte zu diesem Behufe statt der zwei achromatisirenden Glasprismen zwei andere aus einem Bergkrystall, dessen optische Eigenschaften denen des ersteren entgegengesetzt sind, schnitt sie aber so, dass die Krystallisationsachse der zwei Hilfsprismen mit der des Hauptprismas der Richtung nach zusammen fiel, und der Lichtstrahl durch dieses zusammengesetzte Prisma parallel mit dieser Achse ging, um ja nicht die gewöhnliche doppelte Brechung zu erleiden. Durch diesen Apparat überzeugte sich Fresnel thatsächlich, dass die doppelte Brechung, welche ein Lichtsrahl längs der Achse des Krystalls erleidet, bei verschiedenfarbigen Strahlen auch mit einer verschiedenen Stärke erfolgt, und dass z. B. die violetten viel stärker als die rothen gebrochen werden.

7.

Wenn man die zwei Lichtbüschel, welche man durch diese doppelte Brechung erhält, durch einen Doppelspath gehen lässt, so geben sie immer zwei farbige Bilder von gleicher Intensität. Man kann das genannte Prisma, welches die zwei Strahlenbüschel liefert, in die Fassung eines kleinen Perspectives statt des Objectivglases einsetzen und in die Ocularröhre den Doppelspath zur Analyse dieser Strahlen anbrin-

gen. Setzt man die zwei Strahlenbüschel im Innern eines wie oben eingerichteten gläsernen Parallelepipeds zwei totalen Reflexionen aus, so findet man sie vollkommen polarisirt, und zwar jedes in einer Richtung, welche mit der Reflexionsebene einen Winkel von 45° macht. Die Polarisationsebene des einen liegt zur rechten, die des andern zur linken der Reflexionsebene. Ein Büschel verhält sich also gerade so, wie ein polarisirter Strahl, der in einem Glasprisma zwei totale Reflexionen erlitten hat, in einer Ebene, die um 45° gegen die Polarisationsebene geneigt ist und ihr zur rechten liegt, der andere so, wie ein Strahl, der dieselben Modificationen erlitten hat, nur mit dem Unterschiede, dass sich die Reflexionsebene zur linken Seite der Polarisationsebene befindet.

8.

Aus dem bisher Dargestellten ergibt sich der Unterschied zwischen den Eigenschaften eines circulär, und denen eines geradlinig polarisirten Strahles. Ersterer wird auf gleiche Weise reflectirt und gebrochen, die Reflexions - oder Brechungsebene mag rings um den Strahl herum an was immer für einer Seite liegen, letzterer hat an den zwei Seiten, durch welche die Polarisationsebene geht, zwei andere Eigenschaften, als nach einer auf jener senkrechten Richtung.

9.

Der Grund, warum Fresnel die eine Polarisation geradlinig, die andere circulär nennt, liegt in

seiner theoretischen Ansicht über die Natur des Lichtes. Er stellt sich nämlich das Licht der Vibrationshypothese gemäss als das Resultat wellenförmiger Schwingungen des Aethers vor, nimmt aber an, dass die Schwingungen der kleinsten Theile des Aethers, aus denen die Lichtwellen hervorgehen, nicht nach der Richtung erfolgen, nach welcher sich das Licht fortpflanzt, also bei sphärischen Wellen, nicht nach der Richtung des Halbmessers der Wellensphäre, sondern nach einer darauf senkrechten Richtung. Um dieses deutlicher einzusehen, stelle man sich unter a d (Fig. 4) ein Stück der Oberfläche einer Welle vor, deren Mittelpunct unendlich weit entfernt ist, und welches daher als geradlinig angesehen werden kann. In dieser Linie a d schwingen nun nach Fresnels Voraussetzung die Aethertheile von a nach d und wieder zurück von d nach a. Im unpolarisirten Lichte bewegen sich nicht alle Theile zugleich nach einerlei Richtung, im polarisirten hingegen ist die Richtung der Bewegung aller Aethertheile, die zugleich in Bewegung sind, dieselbe, und zwar geradlinig, z. B. von a nach d, in dem auf gewöhnliche Art polarisirten Lichte, hingegen in Kreisen oder andern krummen Linien, in dem vorher besprochenen polarisirten, daher auch ersteres geradlinig, letzteres circulär polarisirt heisst. Um nun zu begreifen, wie bei dieser Richtung der Schwingungen eine Fortpflanzung der Bewegung nach der Richtung des Halbmessers möglich ist, mögen a, b, c, d, e, f, g, h, Aethertheile vorstellen, die in der Lage ihres Gleichgewichtes sind. Man muss wohl annehmen, dass diese Theile aufeinander einwirken,

und dass eine Aenderung in der Lage eines einzigen eine allgemeine Bewegung in allen hervorbringt. Gesetzt nun, durch irgend eine Veranlassung werden die Theile a, b, c d, in die Lage α, β, γ, δ gebracht, so können auch die Theile e, f, g, h nicht mehr in ihrer ursprünglichen Lage bleiben, sondern müssen sich nach den Positionen des Gleichgewichtes bewegen, d. i. nach ε, ζ, η, ϑ. Durch die Verrückung dieser Theile wird wieder die der ihnen zunächst vorliegenden hervorgebracht, und so pflanzt sich die Bewegung nach der Richtung des Halbmessers der Welle fort, wiewohl die Schwingungen in einer darauf senkrechten Richtung erfolgen.

10.

Fresnel ward zur Annahme dieser Hypothese durch die Erfahrung bewogen, dass zwei nach entgegengesetzten Richtungen polarisirte Strahlen keinen Einfluss auf einander ausüben, selbst unter Umständen, wo bei nicht polarisirtem Lichte die Phänomene der Interferenz Statt finden. In der That, wenn man im polarisirten Lichte voraussetzt, dass die Richtung der Bewegung der Theile auf der Polarisationsebene senkrecht ist, so hat man es, bei nach entgegengesetzten Richtungen polarisirtem Lichte mit zwei Bewegungen zu thun, die nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen erfolgen, und daher von einander unabhängig sind. Dieses wäre nicht der Fall, wenn in polarisirten Strahlen eine Bewegung nach der Richtung des Halbmessers Statt fände. Wenn aber dieses beim polarisirten der Fall ist, so muss es am unpolarisirten so seyn; denn gäbe es in einem ge-

wöhnlichen Strahle eine Bewegung nach der Richtung der Fortpflanzung, so müsste diese verloren gehen, wenn er in einen Krystall eintritt, der das Licht doppelt bricht, also dasselbe polarisirt; daraus ginge ein Verlust an lebendiger Kraft, mithin auch an der Intensität des Lichtes hervor, welches der Erfahrung widerspricht, die lehrt, dass in einem vollkommen hellen Krystalle die zwei Strahlenbüschel nach ihrem Austritt aus dem Krystall durch Vereinigung einen Strahl von derselben Intensität geben, wie der eintretende war, mit Abschlag der geringen Lichtmenge, welche an der Trennungsfläche der optischen Mittel reflectirt wird.

Diese Ansicht hat allerdings das für sich, dass sich aus ihr das Verhalten polarisirter Strahlen gegen einander mit der grössten Leichtigkeit erklären lässt. Ja sogar das Entstehen der circulären Polarisation, lässt sich aus ihr ziemlich einfach nachweisen. Es ist dazu das Zusammentreffen zweier gleichintensiver auf gewöhnliche Art aber nach entgegengesetzten Richtungen polarisirter Strahlen nothwendig, deren Differenz der Wege ein ungerades vielfaches des vierten Theiles einer Wellenlänge ist. Um aber dieses begreiflich zu machen, ist es nöthig, einige mathematische Betrachtungen über die Aetherschwingungen in Kürze vorauszuschicken, wie sie Fresnel in verschiedenen Memoiren bekannt gemacht hat.

11.

Man nehme an, es stehe bei den wellenförmigen Schwingungen, welche den Lichterscheinungen

zu Grunde zu liegen scheinen, die Kraft φ. die ein Aethertheilchen beschleuniget, im geraden Verhältnisse mit der Entfernung = x von der Lage des Gleichgewichtes. Demnach hat man:

$\varphi = Ax$, wo A eine Constante bezeichnet.

Ist die Geschwindigkeit des Theilchens = v, die Zeit der Bewegung = t, so hat man auch

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dv = \varphi dt = Axdt$$

mithin ist auch $vdv = Axdx$ und

$$v^2 = C + Ax^2 \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{\frac{C - v^2}{A}}$$

$$\text{mithin } dt = \frac{dv}{\varphi} = \frac{dv}{Ax} = \frac{dv}{\sqrt{A(C - v^2)}}$$

oder durch Integriren

$$t = C' + \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arc. sin} \frac{v}{\sqrt{C}}$$

Wird t vom Anfange der Bewegung an gerechnet, so ist für t = o auch v = o, mithin auch C′ = o daher wird füs diese Bedeutung von t

$$t = \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arc. sin} \frac{v}{\sqrt{C}}$$

und $v = \sqrt{C}. \sin. t \sqrt{A}$.

Legt man als Zeiteinheit die Dauer einer Schwingung zu Grunde, so muss nach Verlauf jeder einzelnen Zeiteinheit v = o werden. Diesem Erfordernisse wird entsprochen, wenn man $\sqrt{A} = 2\pi$ setzt, wo π das bekannte Kreisverhältniss ausdrückt. Dadurch geht obiger Ausdruck in folgenden über;

$$v = \sqrt{C}. \sin 2\pi t.$$

$\sqrt{C} = a$ stellt hier offenbar die Intensität der Bewegung vor.

Der durch eine Schwingung zurückgelegte Raum ist der Zeit proportionirt, und dieser Raum enthält daher die Länge einer Welle so oft in sich, als Aetherschwingungen vom Beginn der Oscillationen vor sich gegangen sind. Ist nun λ die Länge einer Welle, b der Raum, durch welchen sich die Bewegung in der Zeit t fortgepflanzt hat, so hat das Aethertheilchen, bis zu dem sich die Bewegung erstreckt, die absolute Geschwindigkeit

$$v = a.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$$

Man nehme nun zwei nach einerlei Richtung polarisirte Strahlen an, deren Differenz der Wege $= b$ ist, und suche die Eigenschaft des Strahles, der aus ihrer Vereinigung hervorgeht. Zu diesem Behufe denke man sich nach dem Grundsatze der Zerlegung kleiner Bewegungen die Geschwindigkeit der schwingenden Theile jedes Strahles in zwei andere zerlegt, die mit einander einen rechten Winkel einschliessen, so dass man auf diese Weise vier Geschwindigkeiten erhält, deren je zwei einerlei Richtung haben. Machen die neuen Richtungen mit den ursprünglichen den Winkel i und $90^\circ - i$; so erlangt man statt der Geschwindigkeit $v = a.\sin.2\pi t.$

die Gesehwindigkeiten $a.\cos.i.\sin.2\pi t$
und $a.\sin.i.\sin.2\pi t.$

Eben so erhält man statt der Geschwindigkeit

$$v = a.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$$

die partiellen $a.\sin.i.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$

$$a.\cos.i.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right).$$

Setzt man die Constante $a = 1$, so wird aus diesen vier Ausdrücken

$$\cos.i.\sin.2\pi t.$$

$$\sin.i.\sin.2\pi t.$$

$$\sin.i.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$$

$$\sin.i.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right).$$

Die absoluten Geschwindigkeiten nach einer Richtung sind daher $\cos.i.\sin.2\pi t$ und

$$\sin.i.\sin.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right).$$

Wenn man nun bedenkt, dass sich die Entfernungen der schwingenden Theile von der Position ihres Gleichgewichtes nach demselben Gesetze richten, wie ihre Geschwindigkeiten, nur mit dem Unterschiede, dass dort, wo die Entfernung der Theile vom genannten Orte gleich Null ist, die Geschwindigkeit den grössten Werth erlangt, und umgekehrt, so begreift man wohl, dass die Ausdrücke

$$\cos.i.\cos.2\pi t$$

und $\sin.i.\cos.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$

diese Entfernungen angeben.

Um die Beschaffenheit der krummen Linie zu erfahren, welche die schwingenden Theilchen beschreiben, nehme man die zwei rechtwinkligen Coordinatenebenen, nach denen vorhin die Geschwindigkeiten zerlegt wurden, wieder vor, und nenne

$$\cos.i.\cos.2\pi t = x,\ \sin.i.\cos.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right) = y$$

so braucht man nur t zu eliminiren, um die Gleichung der Curve zu finden. Zu diesem Zwecke entwickle man den Werth von $\cos.2\pi\left(t - \frac{b}{\lambda}\right)$, drücke dann den Sinus durch den Cosinus aus, entferne das Wurzelzeichen, und man bekommt:

$$x^2.\sin.^2 i. + y.^2\cos.^2 i - 2xy.\sin.i.\cos.i.\cos.\frac{2\pi b}{\lambda}$$

$$= \sin.^2 i.\cos.^2 i.\sin.^2\frac{2\pi b}{\lambda}.$$

Diese Gleichung gehört offenbar einer Curve der zweiten Ordnung, deren Centrum als Anfangspunct der Coordinaten angenommen ist.

Setzt man $i = 45$, so hat man

$$\sin.i = \cos.i. = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ist ferner b ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so ist

$$\cos.\frac{2\pi b}{\lambda} = 0, \text{ und } \sin.\frac{2\pi b}{\lambda} = 1$$

mithin nimmt für beide Voraussetzungen obige Gleichung die Form

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}$$

an, wodurch ein Kreis bezeichnet wird.

Es folgt also aus den genannten Voraussetzungen, dass die schwingenden Theile Kreise beschreiben.

Auch die Art der Bewegung lässt sich aus den vorigen Ausdrücken ableiten; denn es ist leicht einzusehen, dass die Geschwindigkeit beständig, mithin die Bewegung eine gleichförmige sey.

Nach dieser Darstellung ist die Bewegung der Aethertheile in einer circulär polarisirten Lichtwelle der der Wassertheile in einer Wasserwelle ähnlich, und man dürfte daher nicht hoffen, an letzteren etwas der geradlinigen Polarisation Aehnliches hervorzubringen.

Die gleichförmige Kreisbewegung der Aethertheile findet längs des ganzen Strahles nach derselben Richtung Statt, allein sie nehmen nicht nach der ganzen Länge entsprechende Puncte des Umfanges der Kreisbahn ein, weil während einer Umdrehung sich die Bewegung nach der Richtung des Radius fortpflanzt. Darum befinden sich die Aethertheile, die in einer mit der Fortpflanzung der Bewegung parallelen Linie im Gleichgewichte sind, bei ihrer Bewegung in einer Schraubenlinie. Denkt man sich einen Kreiscylinder, dessen Achse den Strahl vorstellt, und dessen Durchmesser dem des kleinen Kreises gleichkommt, welchen jedes Aethertheilchen beschreibt, zieht man auf der Oberfläche dieses Cylinders eine Schraubenlinie, bei welcher der Abstand zweier Schraubengänge der Länge einer Lichtwelle gleich ist; so gibt diese Schraubenlinie die Bahn, welche die Aethertheile gleichzeitig während ihrer Bewegung einnehmen, welche sich im Gleichgewichte in einer mit der Achse des Cylinders parallelen, auf seiner Oberfläche gezogenen geraden Linie befanden.

12.

Die kreisförmige, gleichförmige Bewegung der Aethertheile kann nun entweder von der rechten znr linken, oder von der linken zur rechten erfol-

gen, so dass obige Schraube bald eine rechts bald eine links gewundene ist. Gibt es Körper, bei denen sich diese beiden Bewegungen nicht mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen können, wie dieses beim Bergkrystall der Fall zu seyn scheint, so werden die Phänomene verschieden ausfallen, je nachdem eine oder die andere Bewegung Statt findet.

13.

Um nun die (in 2) erwähnten Phänomene der circulären Polarisation aus diesen theoretischen Voraussetzungen zu erklären, denket sich Fresnel den polarisirten Strahl nach dem Satze der Zerlegung kleiner Bewegungen in zwei andere zerlegt, wovon einer in der Reflexionsebene polarisirt ist, der andere aber in einer darauf senkrechten Ebene, und die in ihrem Wege um den vierten Theil einer Oscillation differiren. Aus der Interferenz dieser zwei Strahlen gehet dann die circuläre Bewegung der Aethertheile, wie obige Rechnung zeigt, hervor, und von dieser Bewegung ist dann das ganze Verhalten und alle Farbenerscheinungen im circulär polarisirten Lichte eine unmittelbare Folge. Ohne Rechnung ist ersichtlich, dass ein solcher Strahl nicht mehr wie der geradlinig polarisirte, Seiten mit verschiedenen Eigenschaften hat, weil die Bewegung der Aethertheile nicht mehr in einer Ebene Statt hat, und dieses begründet den Unterschied zwischen einem geradlinigen und einem circulär polarisirten Strahl. Allein es haben doch alle Theile eine Bewegung nach einerlei Richtung, und dieses begründet

das Gemeinschaftliche in den Eigenschaften des geradlinig und circulär polarisirten Lichtes.

In einem Bergkrystalle erleidet ein mit der Achse des Krystalls einfallender polarisirter Strahl die früher (6) bezeichnete doppelte Brechung, und wird in zwei Theile zerlegt, wovon einer das Resultat einer circulären Bewegung der Aethertheile ist, die von der rechten zur linken erfolgt, der andere aber aus einer nach entgegengesetzter Richtung erfolgenden Bewegung des Aethers hervorgeht. Es ist wohl denkbar, dass die Anordnung der Theile und die ihnen eigenthümliche Elasticität nicht beiden Bewegungen dieselbe Geschwindigkeit gestattet, und dass daher ein Strahl hinter dem anderen um den vierten Theil einer Schwingung zurückbleibt, mithin aus der Interferenz die Erscheinungen hervorgehen, die in 6 angeführt wurden.

Auf diese Weise glaubt Fresnel diese neuen sonderbaren Phänomene an die früher bekannten durch die Vibrationshypothese anreihen zu können. Sollte auch die Zeit diese Vorstellungsweise durch eine einfachere verdrängen, so wird man ihr doch nicht absprechen können, dass sie scharfsinnig erdacht, und consequent durchgeführt worden sey.

II. Ueber die doppelte Brechung eigener Art, welche das Licht im Analcim erleidet. Vom Doctor Brewster.

(Transactions of the royal society of Edinburgh. vol. X.)

Das Mineral, welches den Namen Analcim oder Cubicit führt, ist von Haüy in die Reihe jener Krystalle versetzt worden, deren Kerngestalt ein Würfel ist, und alle nachfolgenden Mineralogen haben diese Meinung adoptirt. Man kann aber daran, so viel ich weiss, keinen deutlichen Blätterdurchgang erkennen. Die Krystallographen setzen voraus, es müsse einen solchen geben, und nehmen an, der Analcim unterscheide sich in keiner Beziehung von anderen Krystallen derselben Reihe. Die Richtigkeit dieser Annahme wurde aber durch die Beobachtung zweifelhaft, dass er bei der Dicke von $\frac{1}{25}$ Z. eine merkliche Wirkung auf polarisirtes Licht ausübe. Dieses bestimmte mich seine Structur näher zu untersuchen. Dazu ward mir dadurch die Möglichkeit verschafft, dass ich einige sehr transparente Stücke dieses Minerals von der Macdonald's Höhle auf der Insel Eigg und ein sehr schönes Exemplar von Monteggio Maggiore im Vicentinischen bekam. Folgendes enthält die Resultate meiner Untersuchung:

Der Analcim kommt meistens in der Gestalt eines Ikositetraëders vor, welches von vier und zwanzig gleichen und ähnlichen Trapezen begränzt ist, und durch drei Abstumpfungen jeder der acht Ecken eines Würfels entsteht, die gegen jede Seitenfläche unter

144° 44′ 8″, gegen einander also unter 146° 26′ 33″ geneigt sind. Denkt man sich diesen Würfel durch Schnitte getheilt, deren jeder in einer Diagonalebene desselben liegt, so erhält man 24 unregelmässige Tetraëder. Dieselben Schnitte theilen aber das Ikositetraeder in 24 ähnliche Pentaëder; zwei dieser Durchschnittsebenen, die auf einander senkrecht stehen, schneiden sich in einer der Achsen des Körpers, die dritte auf die vorigen senkrechte und die mit ihrem Durchschnitt einen Winkel von 45° macht, geht durch den Mittelpunct des Ikositetraëders. Zwei andere Ebenen halbiren zwei angrenzende Trapeze, welche den Körper begrenzen.

Leitet man polarisirtes Licht in einer Richtung, die auf einer Fläehe des Würfels senkrecht steht, auf den Krystall, so findet man, das alle vorhin bezeichneten Theilungsebenen solche sind, in denen keine doppelte Brechung und keine Polarisation Statt findet, mithin dass sie aus einer unendlich grossen Anzahl von Achsen bestehen, die zu den vier Achsen des Würfels parallel sind.

Wenn sich eine von den Achsen des Würfels in der ursprünglichen Polarisationsebene des Lichtstrahles befindet, so verschwinden alle Farben und werden nicht wieder merklich, wenn man den Krystall um seine Achse dreht. Ist aber die Achse um 45°, gegen jene Ebene geneigt, oder liegen die Diagonalen einer der Flächen des Würfels in dieser Ebene, so bemerkt man ein dunkles Kreuz nach den Richtungen AB,CD (fig 5), welches die vier hellen Stücke von einander trennt, die mit Farbeu des polarisirten Lichtes erscheinen.

Stellt AC,BD (Fig. 5) ein Stück vor, das durch einen auf eine Achse senkrechten Schnitt vom Ikositetraëder getrennt ist, und im polarisirten Lichte steht; so zeigt es im polarisirten Lichte ordentlich das Kreuz AB,CD und die vier hellen Sectoren. Dreht man nun den Krystall um CD wie um seine Achse, so dass A dem Auge näher gebracht, B dabei entfernt wird, so öffnet sich das Kreuz im Mittelpuncte und nimmt die Gestalt zweier Curven AaC,BdD an; wenn sich aber B dem Auge nähert, und A sich davon entfernt, so nehmen diese Curven die Lage BbC, DcA an.

Wenn man vom Krystall ein Stück mit drei Trapezen abschneidet, wie Fig 6, so kann man die Ebenen, wo keine Polarisation Statt findet, nämlich ad, bd, cd deutlich sehen. Bringt man die Kante cd in die Ebene der ursprünglichen Polarisation, so erscheint im polarisirten Lichte das Stück Sadb, dunkel. Dasselbe ist der Fall, wenn man ad, oder bd in diese Lage bringt. Nimmt man statt eines Stückes vom Krystall das ganze Ikositetraëder, und sieht längs der Diagonale des Würfels durch, so bemerkt man sechs Sectoren wie Fig 7 zeigt. Der Grund davon ist, dass die drei Flächen am anderen Ende der Diagonale verkehrt liegen, indem die drei Ecken der einen Seite den Diagonalen der drei Trapezen entsprechen, wie Fig. 8 zeiget. Steht die eine Fläche genau auf der Ebene der Polarisation senkrecht, so sieht man in kleinen Krystallen alle sechs Sectoren gleich stark beleuchtet, dreht man aber diese Fläche gegen die linke Hand, so werden drei wechselweise angeordnete Sectoren dunkel; dreht man sie gegen die rechte, so geschieht dieses mit den drei anderen. Die Polarisation ist längs der Diagonalen am schwächsten.

Neigt man die Fläche Tadc (Fig. 6) so, dass d dem Auge näher gebracht wird, und T sich entfernt, so steigen die Farben nach Newtons Scale und umgekehrt wenn die Bewegung nach der entgegengesetzten Richtung erfolgt. Wenn das Licht schief durchgeht, verschwinden die Linien cd etc.

Schneidet man ein Stück mit 4 Flächen ab, die den Ecken des Würfels entsprechen, wie Fig. 9 zeigt, so werden die Linien ad, cd, bd, bf, ef, gf, wo keine Polarisation Statt findet, sichtbar. Die Linien ad, cd und ef, gf werden schärfer und feiner, je mehr sich der einfallende Strahl der Lage nähert, die mit dem durch d und f gehenden Durchmesser parallel ist. Wenn sich Ss oder df in der ursprünglichen Polarisationsebene befinden, so verschwinden alle Farben, weil dann eine Achse in dieser Ebene liegt. Neigt man Ss so, dass S sich vom Auge entfernt, so steigen die Farben in Sabe, während die in sdbf herabgehen.

Um den Character der Wirkung des Krystalls auf das Licht zu bestimmen, braucht man ihn nur mit einer Platte eines andern Krystalls zu decken, dessen Wirkung auf das Licht bereits bekannt ist, so dass seine Achse quer über den Farbenstreifen liegt. Nimmt man zur Prüfung der Farben in Fig. 5. ein Gipsplättchen, dessen Achse gegen einen Arm des dunklen Kreuzes AB, (Fig. 5) unter 45° geneigt ist, so gehen alle Farben in der Scale herab; daher ist die polarisirende Wirkung des Krystalls negativ gegen die der vier Achsen des Ikositetraeders. Ein Gleiches erfolgt, wenn die Achse eines Gipsplättchens einen der drei Sectoren Fig. 6, in Richtungen, welche

durch d gehen, durchkreuzet, oder wenn man dieser Achse auf dem Stück Fig. 9, die Richtung Ss gibt. In allen diesen Richtungen befolgen die Farben im polarisirten Licht genau das Gesetz der Newtonschen Scale, und haben alle Eigenschaften der Farben, welche die sogenannte bewegliche Polarisation hervorbringt.

Bei einer aufmerksamen Betrachtung der genannten Versuche wird es klar, dass die Farbenerscheinungen, welche ein einzelner Sector, COB (Fig. 10) gewährt, in keiner Beziehung stehen zu der durch O gehenden Achse des Ikositetraëders, die als Achse der doppelten Brechung betrachtet wird. Die Polarisationsachse jedes Stückes eines Sectors wie COB ist hingegen senkrecht auf der Linie CB oder parallel zu einer der rechtwinkeligen Achsen des Ikositetraëders, die auf der durch O gehenden senkrecht steht. Die Farbe eines Punctes, z. B. p hängt nicht von der Entfernung pO von O ab, sondern von seiner Distanz von der nächsten Ebene, wo keine Polarisation Statt findet, in einer auf CB senkrechten Richtung. Heisst nun die durch Erfahrung bestimmte Farbe eines Punctes P, und D die gerade erwähnte Distanz = Pr, so wird die Farbe eines andern Punctes p, dessen Distanz pq = d ist, ausgedrückt durch die Formel

$$t = \frac{Td^2}{D^2}$$

vorausgesetzt, dass die Dicke des Plättchens an beiden Stellen dieselbe ist. Es ist also die Structur, von der die Polarisation abhängt, so beschaffen wie die durch Compression hervorgebrachte, bei welcher die Achse des Druckes, welche mit der des Iko-

sitetraëders zusammenfällt, auf CB senkrecht ist, und durch O geht.

Diese merkwürdige Structur erzeugt eine deutliche Trennung des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Bildes eines kleinen leuchtenden Objectes, wenn der Lichtstrahl durch zwei von den vier Flächen geht, die an jeder der drei Achsen des Körpers liegen. Das ungewöhnliche Bild ist das minder gebrochene, daher ist die doppelt brechende Kraft negativ (abstossend) wie beim Doppelspath, in Bezug auf die Achse, auf welcher der gebrochene Strahl senkrecht steht.

Um sich den merkwürdigen Bau des Analcims gut vorstellen zu können, habe ich die Ebene, wo keine doppelte Brechung und Polarisation Statt findet, nebst den Farben der dazwischenliegenden Körperstücke in den Figuren 11, 12, 13, 14 dargestellt. Die dunkel schattirten Linien sind die genannten Ebenen, und die lichteren die Farbenstellen. In Fig. 12, ist der Würfel perspectivisch dargestellt, in 13 nach einer, auf einer Diagonalen, senkrechten Projection; Fig. 11, stellt das Ikositetraëder perspectivisch dar, und Fig. 14, dasselbe nach einer auf eine Achse senkrechten Projection.

Eines der merkwürdigsten Resultate dieser Versuche ist die eigene Art, wie die doppelt brechende Kraft, nicht blos im ganzen Krystalle als Ganzes betrachtet, sondern in jedem einzelnen Pentaëder, welches den Krystall bildet, vertheilt ist. In keinem der Krystalle, an denen man bis jetzt die Gesetze der doppelten Brechung studierte, hat die Achse der doppelten Brechung eine fixe Lage. Sie ist stets eine

Linie, die zu einer in der Kerngestalt gegebenen parallel ist, und jedes wie immer kleine Stück des Krystalls besitzt seine eigene Achse mit allen den optischen Eigenschaften des Ganzen. Es beruht daher die Eigenschaft der doppelten Brechung auf den kleinsten Theilen des Körpers und ist von der Art, wie sie zu einem krystallisirten Individuum verbunden sind, unabhängig. Im Analcim hingegen gibt es Ebenen, wo keine doppelte Brechung Statt findet, die eine bestimmte unveränderliche Lage haben, und man kann ein Stück eines der dem Krystall bildenden Pentaëder absondern, das gar keine Achse der doppelten Brechung besitzt.

Auch steht der Bau des Analicims in Beziehung auf doppelte Brechung in keiner Verbindung mit zusammengesetzten Krystallen, wie mit dem bipyramidalen schwefelsauren Kali, welches aus einzelnen rhomboëdrischen Prismen besteht, die aufs schönste zu einem geometrisch regelmässigen Körper verbunden sind, oder mit dem noch verwickelteren Mineral, dem Apophyllit, in welchem ein Krystall mit einer Achse mit anderen Krystallen von 2 Achsen symmetrisch so verbunden vorkommen, dass daraus ein regelmässiger Körper hervorgeht. In diesen und in ähnlichen Fällen behält jeder einzelne Krystall, der in der Verbindung vorkömmt, seinen ihm eigenthümlichen Character und besitzt für sich allein die Eigenschaft der doppelten Brechung.

Der Analcim hat mit anderen zusammengesetzten Krystallen das gemein, dass er aus 24 einzelnen Pentaëdern besteht, allein jedes Pentaëder besitzt eine eigene Art der doppelten Brechung, wie man

sie in keinem anderen Krystall findet. Seine Structur ähnelt einigermassen der von rechtwinkeligen Glasplatten, die auch, wenn sie erhitzt werden, Erscheinungen von Ebenen mit keiner Polarisation darbieten. Allein die Aehnlichkeit geht nicht weiter, indem da die Structur von der äusseren Gestalt abhängt, und die Flächen mit keiner Polarisation ihre Lage mit dem Umrisse die Platten ändern. Im Analcim hingegen ist die Structur in keiner Verbindung mit der äussern Gestalt der einzelnen Bruchstücke. In Ermangelung treffenderer Aehnlichkeiten können wir seinen Bau mit dem des erhärteten Fischleims zusammenhalten, wenn er sich im Zustande einer Compression oder einer Dilatation befindet. In diesem Falle behält er eine fixe, das Licht doppelt brechende Structur in Bezug auf die Achse der Compression oder Dilatation, und schneidet man ihn in Pentaëder, die denen des Analcims ähnlich sind, so kann man diese mit einander verbinden, und sogar in Betreff der Richtung der Achsen die Erscheinungen des Analcims nachahmen.

Die hier beschriebenen Eigenscaften des Analcims begründen ein untrügliches und leicht zu erkennendes Merkmal desselben. So klein auch ein Stück seyn mag, und so sehr auch die äusseren Umrisse verloren gegangen seyn mögen, so wird man doch aus seiner Wirkung auf das Licht bestimmen können, ob es zu dieser Species gehört oder nicht.

Haüy bemerkte zuerst im Analcim die besondere Eigenschaft, dass er durch Reiben nicht electrisch wird, und gab ihm davon den Namen. Wenn man bedenkt, dass er ein Aggregat aus Körpern von ver-

schiedener Dichte ist, die durch viele Schnitte von einander getrennt sind, wo die Aenderung der Dichte ihre Richtung verwechselt, so kann man daraus die Schwierigkeit begreifen, durch Reiben die Electricität des Minerals zu zersetzen.

III. Ueber das Haarhygrometer; von Prinsep.

(Journal of Science and the arts. Nr. 4.)

Prinsep hat sich die Aufgabe gegeben, zu bestimmen, 1. ob der Nullpunct der Scale eines Haarhygrometers dem Minimum und der 100te Grad desselben dem Maximum der Feuchtigkeit der Luft bei jeder Temperatur entspreche; 2. ob die Zwischengrade dem Mittelzustande der Feuchtigkeit entsprechen, d. i. ob das Verhältniss der Spannung der Wasserdünste in der Luft dem der Hygrometergrade gleich sey.

1.

Er bediente sich zu diesem Zwecke eines Haarhygrometers, das zwei von einander unabhängige Haare hatte, deren jedes an eine eigene Rolle mit einem eigenen Zeiger befestiget war.

2.

Der Punct der grössten Feuchtigkeit wurde bestimmt, indem das Hygrometer unter eine Glasglocke gebracht wurde, in der sich ein kleines Gefäss

voll reinen Wassers befand, und in welchem man die Luft mittelst der Luftpumpe verdünnen konnte. Der Zeiger weiset auf den beabsichtigten Grad, wenn die Temperatur der Luft und des Wassers dieselben sind, oder noch besser, wenn das Wasser nicht kälter ist, als die Luft. Findet diese Bedingung nicht Statt, so tritt der Zustand der Sättigung der Luft mit Dünsten nicht ein. Der absolute Wärmegrad ist übrigens gleichgültig, denn es wirkt die Wärme so wenig auf das Haar, dass der Zeiger kaum merklich unter 100° sinkt, wenn man den Apparat in Dämpfe von siedendem Wasser bringt.

3.

Allein eine Differenz von einem oder von zwei Graden zwischen der Temperatur des Wassers und der Luft ist im Stande, die Sättigung zu hindern. Um dieses zu zeigen wurde das Hygrometer nebst zwei Thermometern in eine Glasglocke gebracht, unter welcher sich auch eine gesättigte Salzauflösung in einer Schale befand, welche die Eigenschaft hatte, die Luft so weit abzutrocknen, dass das Hygrometer darin nur auf 89°,5 zeigte. Diese Glocke wurde in ein weiteres Gefäss gestellt, das etwas Quecksilber zum Absperren der Communication enthielt, und überdiess mit siedendem Wasser gefüllt war. Eines der vorhin genannten Thermometer diente zur Bestimmung der Temperatur der Luft, das andere zu jener der Auflösung. Unter diesen Umständen zeigten sich folgende Hygrometerstände:

Thermometer im Wasser	Thermometer in der Luft	Hygrometer	Bemerkungen
137°	160°	74°	Das Salz efflorescirte an den Seiten der Schale.
139	152	85	
136.7	138	88.7	
136	136	90	Gleichgew. d. Spannung.
135	133.2	91.2	Das Salz zerfloss wieder.
130	121.5	91.8	
117	116	91.2	
111	110	90.5	
92	91.7	90	Nahe dem Gleichgewicht der Spannung.

4.

Zur Bestimmung des Punctes der grössten Trockenheit wurde statt des vorhin mit Wasser gefüllten Gefässes ein concentrirte Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1.840 enthaltendes unter den Recipienten gegeben, und das Instrument deren Einwirkung durch 24 Stunden ausgesetzt.

5.

Zu einer Methode, die Bedeutung der Zwischengrade des Hygrometers und ihr Verhältniss zur Spannkraft der Dünste zu erforschen, führten folgende Wahrheiten:

In einem ausgekohlten Barometer, in dessen leeren Raum man etwas Wasser gebracht hat, steht das Quecksilber tiefer, als in einem ohne Wasser, und der Unterschied in der Länge beider Quecksilbersäulen gibt diejenige Säule, welche der Spannkraft der Wasserdünste das Gleichgewicht hält.

Wird irgend ein Salz oder eine andere Substanz

im Wasser aufgelöset, welches das Wasser dahin bringt, dass es erst bei einer Temperatur über 212° F. zu sieden anfängt, so wird dadurch auch die Spannkraft der Wasserdämpfe durchaus herabgesetzt.

Beträgt z. B. die Spannung der reinen Wasserdämpfe bei 80° F. einen Zoll, die der aus Wasser mit Schwefelsäure entstehenden bei derselben Temperatur nur einen halben Zoll; so ist im zweiten Falle die Spannung durchaus um die Hälfte kleiner als im ersten. Man muss daher eine Anzahl von Lösungen sich bereiten, die eine verschiedene die Spannkraft der Dämpfe modificirende Kraft haben, selbe in den leeren Raum eines Barometers und zugleich in den Recipienten bringen, wo sich das Hygrometer befindet, und es einige Stunden dieser Einwirkung aussetzen.

6.

Zum wirklichen Versuche wurden statt der langen Barometerröhren, wie sie Gay-Lussac gebraucht hatte, kurze gewählt, die nur etwa 7 Zoll Länge hatten, aber sehr leicht gereiniget und von Luft befreit werden konnten. Zwei solche Barometer für geringen Luftdruck wurden eingerichtet, die Scale gleich auf der Glasröhre angebracht, und ein auf der äusseren Oberfläche des Quecksilbers schwimmender Nonius beigefügt.

Eines dieser zwei Instrumente enthielt über dem Quecksilber eine verdünstende Flüssigkeit, beide wurden aber unter den Recipienten einer Luftpumpe gebracht, der Luftdruck vermindert, und dann die Höhe der beiden Quecksilbersäulen genau und zur

Verminderung der Beobachtungs- und Theilungsfehler an verschiedenen Theilen der Scale gemessen. War die verdünstende Flüssigkeit reines Wasser, so ergaben sich folgende Resultate:

Temperatur	Spannkraft der Dünste nach Prinsep	Spannkraft der Dünste nach Dalton
73°.5	0°.816 Z.	0.809 Z.
80	1.005	1.000
82.2	1.092	1.095
91.7	1.427	1.428
68.5	0.686	0.687

Befand sich Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1.840 als verdünstende Masse in dem einen Barometer, so waren die Resultate, welche man bei der Temperatur von 77° F. erhielt, wie folgt:

Stand des dunstleeren Barometers.	Stand des Barometers mit Dünsten.	Differenz.
4.92 Z.	4.92	0.000
4.97	4.995	+ 0.025
3.01	3.01	0.000
3.09	3.085	— 0.005
1.79	1.80	+ 0.01
1.915	1.93	+ 0.015
2.45	2.44	— 0.01
2.945	2.94	— 0.005
2.84	2.825	— 0.015
4.35	4.35	0.00
4.96	4.955	— 0.005
5.77	5.76	— 0.01
5.79	5.80	+ 0.01

Eine gesättigte Kochsalzauflösung both auf demselben Wege folgende Erscheinungen dar.

Temperatur	Stand des dunstfreien Barometers	Stand des Dünste enthaltenden Barometers	Differenz
7°99	3.255 Z.	2.49 Z.	— 0.755
	2.16	1.41	75
	2.50	1.72	78
	2.61	1.82	79
	2.73	1.95	78
	2.91	2.145	765
	6.07	5.31	76
		Mittelwerth	0.768
77.7	5.00	4.31	— 0.69
	5.22	4.70	72
	1.45	0.75	70
	1.96	0.86	70
	1.47	1.05	69
81	3.785	2.985	— 0.80
	3.83	3.04	79
	3.91	3.115	895
	3.96	3.145	815
	4.35	3.550	700

Es beträgt demnach die Spannkraft dieser Dünste bei 79°. 9 F. 76.8, bei 77°.7, 67.7 bei 81°F. 76.9, mithin im Mittel 76.8 in Hunderttheilen der Wasserdünste aus reinem Wasser.

7.

Es wurden mehrere Versuche der Art angestellt, die alle zu demselben Resultate führten und in fol-

gender Tafel zusammengestellt sind, in welcher die letzte Columne den Hygrometerstand angibt, nachdem das Hygrometer einige Zeit, in den meisten Fällen durch 24 Stunden, der Einwirkung der Dünste ausgesetzt war.

Flüssigkeit.	spec. Gewicht bei 80 ° F.	Beobachtete Spannung.	Durch Interpoliren gefundene Spannung.	Hygrometerstand 1 Haar.	Hygrometerstand 2 Haar.	Hygrometerstand Im Durchschnitte.
Schwefelsäure.	1.840	0.00		0°	3°.0	0.0
	1.648	—	3.5	13.5	—	13.5
	1.615	—	5.0	19	—	19.0
	1.6067	6.2	—	23.5	25.5	23.5
	1.525	—	13.0	34	—	34.0
	1.4841	18.8	—	46.5	47.5	46.5
	1.463	—	22.0	49.5	—	49.5
	1.4313	31.1	—	60	60	60.0
	1.333	—	37.6	64	—	64.0
	1.3290	54.6	—	76.5	76	76.1
	1.312	—	57	80	—	80
	1.2642	68.8	—	85.5	84.7	85.5
Gesättigte Salzauflösung.	—	76.8	—	89.5	88.5	89.5
Reines Wasser.	1.000	100		100	98.7	100.

8.

Um noch eine bessere Uebersicht zwischen dem Gange der Hygrometer und der Spannkraft der Dünste zu bekommen, wurden sie graphisch dargestellt, und zu diesem Behufe die Hygrometergrade als Abscissen, die Spannkraft der ihnen entsprechenden Dünste hingegen als Ordinaten angenommen. Die durch die

Endpuncte der Ordinaten gezogene Linie hatte, dem blossen Augenmasse nach, Aehnlichkeit mit einer Parabel. Biot construirte auf ähnliche Weise die Resultate aus Gay-Lussacs Versuchen, fand aber dabei eine hyperbolische Curve, mit welcher die vorhin besprochene in der ersten Hälfte wohl übereinstimmte; allein sie wich in dem dem Nullpuncte nahen Theile stark von ihr ab. Indessen waren Gay-Lussacs Versuche bei einer Temperatur von 50° F. angestellt, während die hier in Rede stehenden zwischen 80° und 90° gemacht wurden.

9.

Bei einer näheren Vergleichung der Ordinaten mit den Abscissen fand es sich, dass erstere schneller wachsen als die Quadrate der letztern, aber doch minder schnell als die Würfel derselben. Heisst man die Temperatur T, die ihr entsprechende Spannung H, so gibt der Ausdruck

$$\log T = \log H + 2.2 - 0.400$$

Resultate, die mit den durch Versuche gefundenen sehr nahe übereinstimmen, wenn man noch die Correction $o = \frac{25 - m}{10}$ anbringt, bei welcher m den Abstand eines Grades vom 25ten anzeigt. Davon überzeugt man sich durch eine Vergleichung der auf dem Experimentalwege gefundenen und der aus genannter Formel berechneten Resultate, die folgende Tafel enthält:

Hygrometer-grade.	Beobachtete Spannung.	Berechnete Spannung.	Fehler.
0°.0	0°.0	0.0	0.0
13.5	3.5	2.6	—0.9
19	5	4.5	—0.5
23.5	6.2	6.4	+0.2
34	13	10.9	—2.1
46.5	18.8	18.8	0
49.5	22	21.6	—0.4
60	31.1	31.5	+0.4
64	37.6	36	—1.6
76.5	54.6	53.1	—1.5
80	57	58.3	+1.3
85.5	68.8	69.2	+0.4
89.5	76.8	77.1	+0.3
100	100	100	0.

10.

Zur noch näheren Prüfung dieser Resultate wurde nun die Spannkraft der Dünste, wie sie obige Tafel gibt, mit der verglichen, die man durch das von Daniell empfohlene Verfahren erhält. Folgende Tafel erleichtert diese Vergleichung:

Temperatur der Atmosphäre h	Bethauungspunct h′	Spannkraft der Dünste		Verhältniss beider Spannungen, oder wirkliche Spannung der Dünste	Hygrometergrade	Spannung nach obiger Tafel	Differenz
		für h	für h′				
88.°3	79.°5	1.295	0.985	76	89.7	77.6	+ 1.6
89	77.5	1.52	0.91	69	86.5	71.1	+ 2.1
92	76	1.44	0.88	61.1	80	58.3	— 2.8
82.8	76.6	1.10	0.90	81.8	92.5	83.4	+ 1.6
84	62	1.14	0.56	49.1	73	48.0	— 1.1
78.5	61	0.955	0.542	56.7	78.5	56.7	0.0
72.5	50	0.770	0.375	48.7	73	47.7	— 1.0
66	43	0.635	0.293	46.1	72.6	47.2	+ 1.1
66	42	0.635	0.283	44.5	71	64.7	+ 0.2

Alles dieses gibt einen hinreichenden Beweis, dass ein gut adjustirtes Haarhygrometer die in der Luft vorhandene Dunstmenge bis auf 2 oder 3 per Cent richtig angebe, ein Fehler, dem man auch nach Daniells Methode nicht wohl entgeht. Indess hat ein nach letzterer Methode verfertigtes Instrument den unverkennbaren Vorzug einer geringeren Zerbrechlichkeit und einer grösseren Sicherheit in der Anzeige, während bei einem Haarhygrometer drei Puncte durch Versuche gefunden werden müssen. Indess behält das Haar seine hygroscopische Eigenschaft lange

bei, indem man selbst an einer Mumie die Haare noch mit ihrer vollen hygroscopischen Kraft gefunden hat.

Folgende Tafel enthält nun die Spannung der Wasserdünste, wie sie sich aus obiger Formel mit Zuziehung der angezeigten Correction ergeben.

Hygrometerstand. H	Spannung. S	H	S	H	S	H	S	H	S
1	0.11	21	5.3	41	14.9	61	32.6	81	61.0
2	0.22	22	5.8	42	15.6	62	33.7	82	62.8
3	0.34	23	6.2	43	16.3	63	34.9	83	64.6
4	0.48	24	6.6	44	17.0	64	36.0	84	66.4
5	0.62	25	7.1	45	17.7	65	37.2	85	68.3
6	0.80	26	7.5	46	18.5	66	38.4	86	70.2
7	0.96	27	7.9	47	19.3	67	39.7	87	72.1
8	1.19	28	8.3	48	20.1	68	41.0	88	74.2
9	1.40	29	8.7	49	20.9	69	42.2	89	76.1
10	1.63	30	9.1	50	21.8	70	43.6	90	78.2
11	1.9	31	9.5	51	22.6	71	44.7	91	80.3
12	2.1	32	9.9	52	23.5	72	46.2	92	82.4
13	2.4	33	10.4	53	24.4	73	47.7	93	84.5
14	2.7	34	10.9	54	25.4	74	49.1	94	86.6
15	3.0	35	11.4	55	26.3	75	50.6	95	88.7
16	3.4	36	12.0	56	27.3	76	52.2	96	90.9
17	3.7	37	12.5	57	28.4	77	53.9	97	93.1
18	4.1	38	13.0	58	29.4	78	55.7	98	95.4
19	4.5	39	13.7	59	30.4	79	57.4	99	97.3
20	4.9	40	14.3	60	31.5	80	59.2	100	100

IV. Ablenkung einer Magnetnadel durch den an einer gewöhnlichen Electrisirmaschine entwickelten electrischen Strom und durch die Electricität der Wolken, von Colladon.

Gelesen in der k. Akademie der Wissenschaften am 21. Aug. 1826.
(Bulletin univ. Septemb. 1826.)

Colladon hat die Aehnlichkeit zwischen einer Electrisirmaschine und einer Volta'schen Säule dadurch vollends bewiesen, dass er zeigte, ein mit einer Electrisirmaschine verbundener Leiter lenke eine Magnetnadel so gut ab, wie der, welcher mit den Polen einer Volta'schen Säule in Communication steht. Man weiss seit Oersteds Entdeckung, dass jede geschlossene electrische Kette eine Magnetnadel ablenken kann; man war aber noch nicht dahin gelangt, eine ähnliche Ablenkung durch den electrischen Strom hervorzubringen, den man erzeugt, wenn man den Conductor einer Electrisirmaschine mit den Reibzeugen in Verbindung setzt. Die Verschiedenheit des Verhaltens in dieser Hinsicht war der Grund der Unterscheidung zwischen den Volta'schen Säulen und den Electrisirmaschinen, und der Annahme, dass die in jener innerhalb einer gegebenen Zeit in Umlauf gesetzte Electricitätsmenge gegen die in derselben Zeit an einer Electrisirmaschine erregte, unvergleichbar gross sey, und dass daher die Geschwindigkeit der Electricität in jener fast unendliche Male grösser sey als die derjenigen, welche vom Glase einer Reibungsmaschine gegen den Conductor strömt.

Indess waren mehrere Erscheinungen mit diesen Annahmen nicht in Uebereinstimmung. Colladon wollte den Versuch wiederhohlen, und wendete dazu eine Batterie von 4000 Quadratzoll Oberfläche statt einer Electrisirmaschine an, und bediente sich eines Galvanometers (Multiplicators. B) mit 100 Windungen und zwei Magnetnadeln, setzte ein Ende vom Draht desselben mit der äussern Belegung der Batterie in Communication, versah das andere Ende mit einer Spitze, und zog mittelst ihr Funken aus dem Knopf der Batterie. Dieser Versuch gelang vollkommen; die Magnetnadel des Galvanometers fieng an abzuweichen, selbst als die Spitze noch einige Centimeter vom Knopf abstand. Näherte er ihm dieselbe mehr, so nahm die Ablenkung stark zu, und bei den ersten Versuchen überschritt sie öfters 40 Grade. In jedem Falle war die Richtung dieser Ablenkung so, wie es die Richtung des electrischen Stromes verlangt; sie änderte sich jedesmal, als man letzterem eine entgegengesetzte Richtung gab, es mochte dieses dadurch geschehen, dass man die Enddräthe des Galvanometers verwechselte, oder dadurch, dass man die Batterie entgegengesetzt lud. Weil ein hinreichend starker electrischer Strom beim Durchgange durch einen sehr langen Leitungsdraht keinen merklichen Widerstand erfährt, so dachte Colladon, dass man die Ablenkung bedeutend vergrössern könne, wenn man die Anzahl der Windungen des Galvanometers vermehrt, besonders wenn man die Dräthe gut isolirt. Er liess sich einen Galvanometer mit 500 Windungen machen, wovon die Drähte doppelt mit Seide umwickelt waren, und jede Windung war

von der zunächst darauf folgenden mittelst Wachstaffet getrennt. Dieser Apparat gab eine mehr als zehnfache Wirkung zum Beweise, wie wichtig es ist, die Drähte gut zu isoliren, woran man früher nie dachte. *)

Die in einer einzigen Leidnerflasche angehäufte Electricität von weniger als einem Quadratfuss Oberfläche bewirkte schon eine Ablenkung von mehr als 32°. Die Batterie von 4000 Quadratzollen brachte Ablenkungen hervor, die zu sehr an das Maximum grenzten, als dass sie genau bestimmt werden konnten. Näherte man ihr aber das Ende des Galvanometers nur sehr langsam, so erhielt man einen Strom, der während einer Minute eine constante Ablenkung von 30° erzeugte. Man kann dieses Phänomen sogar durch eine Electrisirmaschine allein hervorbringen. Als Colladon ein Ende des Galvanometers an ein Kissen befesigte, und mittelst des anderen Endes aus dem Conductor Funken zog, erhielt er folgende Ablenkungen:

Abstand der Saugspitze vom Leiter	$0^m.1$	$0^m.2$	$0^m.4$	$0^m.8$	1^m
Ablenkung	18°	10°	5°30′	3°	2°

Es nahm also die Ablenkung nahe in demselben Verhältnisse zu, als die Entfernung der Saugpsitze vom Conductor abnahm, und selbst eine Luftschichte von 1 Meter Dicke hinderte den Strom nicht gänz-

*) Dieses dürfte wohl nur da der Fall seyn, wo man es mit sehr intensiver Electricität zu thun hat, für welche auch die Leitungsfähigkeit der die Drähte trennenden Seidenfäden grösser ist, als für die schwache Electricität einer Volta'schen Säule (B).

lich. Man brauchte nicht die Electricität von Ferne aufzufangen, um regelmässige Ablenkungen zu erhalten. Wenn man den Galvanometer mit seinen zwei Enden an das Reibzeug und an den Conductor befestigte, so fing die Magnetnadel an abzuweichen, sobald die Maschine gedreht wurde, und erlangte eine constante Ablenkung von ungefähr 40°. Aenderte man die Geschwindigkeit der Umdrehung des gläsernen Cylinders der Maschine, so konnte man nach Belieben diese Ablenkung vergrössern und verkleinern. Colladon suchte annäherungsweise eine Vergleichung zwischen dem Strome einer geschlossenen Kette und dem einer Säule. Er löthete an die beiden Enden eines Galvanometers, der 100 Windungen hatte, einen Platindraht, erhielt eine der Löthstellen bei der Temperatur von 0° C., während er die andere in einem Quecksilberbade erhitzte. Der thermo-electrische Strom, welcher durch eine Temperaturdifferenz von 125° der beiden Löthstellen hervorgebracht wurde, bewirkte dieselbe Ablenkung, wie eine Batterie von 4000 Quadratzoll Oberfläche. Bei der Wiederhohlung dieses Versuches mit einem Galvanometer von 500 Windungen konnte eine Differenz in der Temperatur der Löthstellen von mehr als 1000° keine Ablenkung von einem Grade erzeugen. Ein Plattenpaar aus Zink und Kupfer von 4 Q. Fuss Oberfläche, das in gesäuertes Wasser getaucht ward, bewirkte blos eine Ablenkung von 2° — 3°, ja eine Säule aus 24 Plattenpaaren mit ½ Q. F. Oberfläche, lenkte die Magnetnadel nur um 20° ab, mithin um weniger, als der electrische Strom an einer Electrisirmaschine.

Da der electrische Strom, der durch Berührung zweier Metalle erzeugt wird, eine sehr geringe Intensität hat, so wird er in einem so langen Leiter gänzlich gehemmt.

Die electrischen Strahlenbüschel, die man an hohen spitzigen Körpern zur Zeit eines Gewitters bemerkte, brachten Colladon auf den Gedanken, dass man den Galvanometer zur Bestimmung der von den Wolken entnommenen Electricitätsmenge anwenden könne. Er liess deshalb auf dem Observatorium des Collége de France eine 15 Meter lange Stange errichten, die mit einem mit Seide übersponnenen und isolirten Drahte in Verbindung stand, der mit einem Ende an den Galvanometer befestiget ward, während das andere Ende desselben mittelst der Ableitungsstange mit der Erde communicirte.

Während zweier Gewitter, die am 3ten und 4ten August Statt hatten, war die Ablenkung der Magnetnadel fast so gross, wie die durch eine starke Batterie bewirkte. Hierauf bemerkte man selbst am Galvanometer mit 500 Windungen keine grössere Ablenkung als die von 10° — 20°. Bei heiterer Zeit war diese Ablenkung beständig = 0 und man erhielt mit einem Electrometer kein Zeichen von Electricität. In einem einzigen Falle, nämlich bei einem Gewitter, das in einiger Entfernung von Paris Statt fand, zeigten sowohl der Galvanometer als der Electrometer Electricität an; die Ablenkung erreichte 18°, wiewohl man über dem Observatorium keine Wolken bemerkte, ausser in einer Entfernung von 31° vom Zenith.

Endlich zogen am 5. September zwischen 3 und 5 Uhr Nachmittags drei von einem heftigen Winde

gejagte Regenwolken über Paris. An allen drei zeigte die Richtung der Ablenkung positive Electricität an, sie wurde aber schwächer und ging plötzlich in eine entgegengesetzte über, als die Wolkengruppe gänzlich vorüber gegangen war. Die zwei ersten Male betrug die Ablenkung zwischen 50°—60° wiewohl man keinen Blitz gewahr wurde, bei jedem Windstoss nahm sie plötzlich um 10° zu. Das dritte Gewitter erzeugte eine noch grössere Ablenkung, die manchmal 87° betrug, also dem Maximum nahe war. Während 10 Minuten war die Ablenkung, positiv; als es zu donnern anfing, ging bei jedem Donnerschlag die Ablenkung in die entgegengesetzte über, und stieg plötzlich um mehrere Grade. Endlich beharrte sie auf der Richtung der negativen Electricität, bis die Wolke ganz vorüber war. Diese Erfahrungen zeigen, dass das Galvanometer mit Nutzen zur Untersuchung der atmosphärischen Electricität gebraucht werden kann. Wäre es bewiesen, dass die Electricität zur Bildung des Hagels etwas beiträgt, so wäre dieses Instrument das einzige, welches auf eine präcise Art die Menge der durch Spitzen abgeleiteten Electricität angäbe, welche mehr oder weniger hoch sind, und mehr oder weniger mit der Erde communiciren.

V. Ueber Entzündung des Schiesspulvers durch die Electricität, und über ihren Durchgang durch Wasser von Sturgeon.

(Philos. mag. and journ. N. 338. p. 445)

Man gibt es im Allgemeinen zu, dass die electrischen Phänomene noch in tiefes Dunkel gehüllt sind. Vielleicht ist kein Punct mehr geeignet, unsere Unwissenheit in diesem Zweige des Wissens an Tag zu legen, als die Entzündung des Schiesspulvers.

Man kann es nicht läugnen, dass Schiesspulver durch Electricität schon von mehreren angezündet worden, jedoch gelang dieser Versuch nicht allen Experimentatoren, andern schlug er immer fehl. Dieses zeigt, dass man das Phänomen noch nicht hinreichend versteht.

Ich bin überzeugt, dass kein Physiker durch fruchtlose Versuche, Schiesspulver mittelst der Electricität anzuzünden, mehr in Verlegenheit gesetzt wurde als ich, und doch habe ich sie auf die mannigfaltigste Art abgeändert. Es wurde nun der Wunsch in mir rege, die Ursache des Misslingens zu erforschen.

Es ist bekannt, dass ein rothglühender Metallstab, mit dem man Schiesspulver berührt, dasselbe nicht im Augenblicke der Berührung entzündet, sondern dass es eine, wiewohl sehr kurze Zeit braucht, bis ein einziges Körnchen Feuer fängt, und dass man mit einem solchen Metallstück so schnell über die Hand fahren kann, dass man kaum einige Hitze empfindet. Der Gegenstand meiner ersten Bemühung war nun, ein Mittel ausfindig zu machen, die Geschwindigkeit

des electrischen Fluidums zu vermindern, denn ich dachte, dass Schiesspulver von der Electricität desto leichter entzündet werden wird, je länger sie mit demselben in Berührung bleibt. Ich setzte auch voraus, dass, wenn die Electricität durch Wasser verzögert wird, durch eine sehr schnelle Berührung keine volle Entladung erfolgen werde; jedoch nach einigen Versuchen hierüber schien es, als erfolgte durch eine weite mit Wasser gefüllte Röhre die Entladung eben so vollkommen, wie durch Metall. Ich bemerkte auch immer, dass der Knall immer viel schwächer war, und das Schiesspulver, welches sich im Wege befand, den die Electricität nehmen musste, nicht in eine so grosse Entfernung hinweggetrieben wurde, wenn die Entladung durch Wasser geschah, als wenn sie durch Metall erfolgte. Daher war es klar, dass die Kraft durch dieses Mittel geschwächt wurde. Ich dachte nun, dass das Wasser deshalb die Electricität so schwäche, weil es eine viel geringere Leitungsfähigkeit besitzt, als Metalle und andere gute Leiter, und dass man die Geschwindigkeit der Electricität bis zu einem beliebigen Grade vermindern kann, wenn man den Durchmesser der Wassersäule, durch welche sie geht, vermindert. Es ist nämlich bekannt, dass die Leitungsfähigkeit eines Körpers seiner natürlichen Capacität, und der an jedem Puncte des Umfanges vorhandenen Quantität proportionirt sey. Ein Schlag, der einen dünnen Draht ganz zerstört, geht durch einen andern von demselben Metalle, der aber grössere Dimensionen hat, ohne ihn zu verletzen. Ich dachte nun, es mögen wohl jene, die Schiesspulver durch Electricität angezündet haben, dadurch

ihren Zweck erreicht haben, dass sie dieselbe durch sehr enge mit Wasser gefüllte Röhren leiteten. Ich hatte zwar keine so engen Röhren bei der Hand, ging aber von der Voraussetzung aus, dass irgend eine nicht leitende Substanz, wie z. B. Papier, Seide, die mit Wasser befeuchtet ist, nur so viel Leitungskraft besitzt, als dem darin enthaltenen Wasser zukommt. Daher machte ich meinen ersten Versuch mit einem einfachen Faden Nähseide von 4 Zoll Länge, den ich zwischen den Lippen durchzog und ihn so befeuchtete. Dieser Faden ward als ein Theil des Verbindungsdrahtes zwischen der äusseren und inneren Belegung einer Leidnerflasche gebraucht. An einer anderen Stelle der Kette waren zwei von einander etwas abstehende Drähte angebracht, und zwischen sie etwas Schiesspulver gegeben. Bei der Entladung der Flasche entzündete sich das Schiesspulver. Ich wiederhohlte diesen Versuch öfter mit demselben Erfolge. Hierauf änderte ich den Versuch ab, und bediente mich desselben Seidenfadens aber einer kleineren Flasche, und es gelang mir, Pulver mit 30 Zoll der geladenen Oberfläche zu entzünden. Ich muss bemerken, dass der Versuch mit einer so kleinen Oberfläche nicht gelang, wenn der Faden sehr nass war, und ich glaube, dass eine zu grosse Wassermenge die Electricität zu schnell ableitete. Wurde etwas von der Flüssigkeit ausgedrückt, so wurde der Faden ein schlechterer Leiter, und der Versuch gelang.

Ich versuchte hierauf, wie weit die Wassermenge ohne Störung des Erfolges bei der ersteren Flasche vermehrt werden durfte. Zu diesem Zwecke wurde ein Stück Bindfaden in Wasser getaucht. Dieser leitete aber die

Electricität zu gut, als dass der Versuch hätte mit Erfolg gemacht werden können, man musste etwas Wasser herausdrücken, um ein glückliches Resultat zu bekommen. Derselbe Erfolg zeigte sich mit befeuchtetem Papier.

Da ich mir nun in diesem Puncte genügt hatte, so unternahm ich es, mich zu überzeugen, ob das electrische Fluidum beim Durchgange durch Wasser eine Aenderung in seinem physikalischen Character erleidet, oder ob die Entzündung des Schiesspulvers ganz von der Zeit abhängt, die das Fluidum braucht, um durch dasselbe zu gehen. Zu diesem Zwecke nahm ich zwei Flaschen, deren eine A, die andere B. genannt werden mag.

Ich lud A positiv, B negativ, und verband ihre Aussenseiten mit Wasser. Als ich A gegen B durch Wasser entlud, wurden beide neutralisirt. Nun wurde A wieder positiv geladen, und dann theilweise gegen B durch Wasser entladen.

Als jede Flasche für sich ausgeladen wurde, bemerkte man keinen Unterschied im Knalle. A wurde neuerdings positiv geladen, und wieder durch Wasser gegen B theilweise entladen. Als nun B durch befeuchtetes Papier entladen wurde, entzündete sich das in der Kette befindliche Schiesspulver. Daraus schloss ich, dass die Entzündung desselben von der Zeit abhängt, die die Electricität braucht, um durch dasselbe zu gehen, und nicht von einer Aenderung des physikalischen Characters der Electricität. Diese Zeit richtet sich aber bei einerlei Ladung nach der Dicke der Wassersäule, durch welche man die Electricität leitet.

Ich bemerkte, dass bei diesen Versuchen der befeuchtete Faden fast trocken ward. Es hat daher das electrische Fluidum das Wasser entweder zersetzt oder es zum Verdünsten gebracht. Ich glaube, dass ersteres der Fall war, und dass diese Zersetzung durch Verminderung des Durchmessers der Wassersäule erleichtert worden ist. Indess bleibt dieses eine blosse Vermuthung, da es mir an Zeit gebrach, dieses Phänomen noch näher zu untersuchen.

Ich habe oft eine Flasche durch meinen eigenen Körper entladen, ohne eine andere Ungemächlichkeit als eine brennende Empfindung an den Fingerspitzen zu empfinden, und doch durch dieselbe Entladung auch Pulver angezündet. Der Schlag kann durch wasserreiche Leiter zu jedem Grade geschwächt werden, so stark er ursprünglich sein mag. Ich habe so eine Armatur von 8 Quadratfuss durch meinen Körper entladen, ohne einen lästigen Stoss zu empfinden.

Diese Modification der Electricität kann in der Medicin ihre Anwendung finden; denn man kann sie an jedem Theil des Körpers anwenden, ohne einen andern ins Mitleiden zu ziehen, und die stärkste Electricität an dem schwächsten Kranken anwenden, ohne ihm einen Stoss zu geben.

Es ist also erwiesen, dass die Stärke einer electrischen Entladung durch Metall, stets der Dicke der Leitungsdrähte proportionirt ist, oder dass dieselbe Electricitätsmenge mit einer grösseren Kraft wirkt, wenn sie durch einen dicken Draht geleitet wird, als wenn dieses durch einen dünnen geschieht. Dieses hat aber auch eine Grenze; denn wenn der Leitungsdraht einmal die zur ununterbrochenen Durchleitung der

Electricität nöthige Capacität hat, so gestattet ein noch dickerer keiner Verstärkung mehr. Indess bin ich doch der Meinung, dass ein dicker Draht die Transmission der Electricität bis zu einem höheren Grade erleichtert, als man gewöhnlich glaubt.

Es ist klar, dass die Electricität in einem dünneren Draht zu einem längeren Strom ausgedehnt ist als in einem dickeren, weil sie in jenem weniger wirket, gerade so, wie eine gegebene Wassermenge in einer engeren Röhre eine längere Säule bildet als in einer weiteren, oder so, wie ein Stück Metall einen längern Drath gibt, wenn es durch ein engeres Loch gezogen wird, als wenn es durch ein weiteres geht.

Man kann aber nun fragen, welche Länge eines Drahtstückes von gegebener Dicke nimmt wohl eine gewisse Menge Electricität in jedem Augenblick ein? Ich glaubte, es lasse sich darüber Gewissheit erlangen, wenn ich etwas Schiesspulver in einer geringen Entfernung von der positiven Belegung einer Flasche anbrachte, während der befeuchtete Faden nahe an der negativen Seite war, und sich zwischen ihnen ein langer Kupferdraht befand. Konnte dieser vermög seiner Dimensionen alle Electricität enthalten, so würde sie keinen Widerstand finden, bis sie am feuchten Faden anlangte, die Zeit, in welcher sie am Schiesspulver verweilte, würde nicht länger ausfallen, und dieses könnte dann nicht entzündet werden.

Ich habe auf diese Weise den feuchten Faden vom Schiesspulver durch Kupferdräthe von Nr. 16, die 1 bis 20 Yards lang waren, getrennt, und bei jeder Länge des Leitungsdrahtes erfolgte die Endzündung des Schiesspulvers durch Electricität.

Ich betrachte dieses als einen merkwürdigen Umstand, nicht bloss weil der Versuch mir gelang, sondern weil es sich dabei immer zeigte, dass durch die Electricität, wenn sie durch hinreichend grosse gute Leiter geht, das Schiesspulver am negativen und nicht am positiven Ende des feuchten Drahtes angezündet wird. Dieses spricht für die Franklin'sche Hypothese.

Ich bin fest überzeugt, dass die Entzündung des Schiesspulvers, wenn es das electrische Fluidum ohne Unterbrechung durchströmt, nicht durch ein Zurückprallen dieses Fluidums in die Flasche durch den den Strom unterbrechenden feuchten Faden hervorgebracht wird, weil wenn es mit Gewalt durch das Schiesspulver geht, dasselbe zerstreut wird, und daher zur Zeit der Rückkehr der Electricität kein Körnchen mehr im Kreise derselben sich befindet.

Ich habe mehrere Versuche über die Entzündung des Schiesspulvers durch die Electricität vor Zeugen gemacht. Bei einem derselben entzündete es sich an einem Ende des feuchten Fadens, bei einem anderen befanden sich vier Feuergewehre im Wege des electrischen Stroms und wurden abgefeuert. Eben so habe ich oft 6 Gewehre auf einmal losgebrannt, und dann war die Entzündung so augenblicklich, dass alle gleichsam nur einen einzigen Knall gaben.

Ich bin gegenwärtig mit anderen Versuchen über denselben Theil der Electricität beschäftiget und werde die Resultate derselben wenn sie der Mittheilung werth sind, bekannt machen.

VI. Resultate der Thermometer-Beobachtungen, welche in den Jahren 1824 und 1825 alle Stunden zu Leith angestellt wurden. (Im Auszuge.)

(Transac. of the roy. soc. of Edinburgh. Tom. X.)

Im Jahre 1820 schlug Brewster der königlichen Societät zu Edinburgh vor, stündliche Thermometerbeobachtungen in Schottland anstellen zu lassen. Wirklich mussten solche Beobachtungen, in einem Lande, das so grosse Mannigfaltigkeiten des Bodens, Climas und der Elevation darbietet, und das beinahe 6 Breitengrade einnimmt, ganz dazu geeignet seyn, um daraus das Gesetz der Vertheilung der Wärme abzuleiten, wenn sie auch nicht schon dadurch interessant wären, dass sie auf den Landbau und die Gartencultur Einfluss haben können. Die Gesellschaft nahm seinen Vorschlag an, und es fanden sich mehrere verständige Individuen, die es über sich nahmen, das Thermometer täglich zweimal zu beobachten und gelegenheitlich auch die Temperatur der Quellen und Brunnen zu untersuchen. Im Jahre 1821 wurden beinahe 60 meteorologische Journale in Schottland geführt, und wiewohl diese Zahl im folgenden Jahre geringer wurde, so konnte Brewster doch viele Beobachtungen, welche durch 5 Jahre fortgeführt wurden, mit einander vergleichen und daraus Resultate schöpfen. Bei der Leitung dieser Beobachtungen handelte es sich aber darum, zwei Stunden des Tages zu bestimmen, an welchen die Tempera-

tur beobachtet werden sollte, und hieraus die mittlere Tagestemperatur möglichst nahe zu bestimmen. Die dazu verwendeten Stunden waren 10 Uhr Vormittags und 10 Uhr Abends, wie sie Gordon vorgeschlagen hatte. Als so die Beobachtungen durch 3 Jahre gemacht waren, kam Brewster der Gedanke, es sey besser, die Beobachtungen an solchen Stunden vorzunehmen, an denen die mittlere Temperatur des Tages selbst Statt fand, damit, wenn etwa eine Beobachtung fehlte, die andere in möglichster Annäherung die mittlere Temperatur angäbe. Allein man wusste nicht, wann diese Temperatur eintritt. Professor Dewey in Neu-York hat in jedem der Monate, März, April, Juni und October des Jahres 1816 durch 5 Tage, im Jänner des Jahres 1817 durch 8 Tage und im Februar durch 2 Tage stündlich das Thermometer beobachtet, Coldstream hat dasselbe zu Leith in jedem Monat durch 24 auf einander folgende Stunden vom Juli 1822 bis zum Juli 1823 gethan. Nach den letzteren Beobachtungen schien die mittlere Temperatur um 8½ Uhr des Morgens und 8½ Uhr des Abends einzutreten und diese Stunden wurden daher auch für die 1824 und 1825 anzustellenden Beobachtungen gewählt. Jedoch waren sie aus zu wenigen Beobachtungen abgenommen, als das man auf Genauigkeit rechnen könnte, und es war sehr zu wünschen, dass man sie Jahre hindurch zu jeder Stunde anstellte. Dieses konnte nur an einem Militär-Posten ausgeführt werden. Hierzu ward Leith auserkohren.

Die Beobachtungen begannen am ersten Jänner des Jahres 1824 und wurden durch zwei volle Jahre

ununterbrochen fortgeführt. So fand man für das Jahr 1824

die mittl. Temper. der Wintermonate, d. i. Decemb.,
Januar, Februar = 40°.67 F.
- - - - Frühlingsmonate d. i. März,
April, Mai = 45°.38
- - - - Sommermonate d. i. Juni,
Juli, August = 57°.24
- - - - Herbstmonate d. i. Septemb.,
October, Nov. = 47°.91
- - - des ganzen Jahres . . . . = 47°.81

Eben so gaben die Beobachtungen für das Jahr 1825

die mittl. Temper. der Wintermonate d. i. Decemb.,
Jannar, Februar = 40°312
- - - - Frühlingsmonate d. i. März,
April, Mai = 46°.121
- - - - Sommermonate d. i. Juni,
Juli, August = 59°.306
- - - - Herbstmonate d. i. Septemb.,
October, Nov. = 49°.907
- - - des ganzen Jahres . . . . = 48°.911

Stellt man die mittlere Temperatur jeder einzelnen Stunde des Tages graphisch dar, so findet man die Curve der täglichen Wärmeänderung. Brewster untersuchte, ob die Arme der Curve der täglichen Wärmeänderung mit irgend einer bekannten krummen Linie Aehnlichkeit haben und überzeugte sich, dass sie fast eine parabolische Gestalt haben. Die Abweichung von dieser Curve ist in dem Arme am grössten, der die Temperaturänderung nach Mitternacht angibt und zwar vorzüglich zwischen 4 U. und 8 U. Morgens. Indess glaubt er, dass die Uebereinstim-

mung grösser ausfallen würde, wenn man durch längere Zeit fortgesetzte stündliche Wärmebeobachtungen hätte, weil die kleinen Abweichungen von einem gleichförmigen Gange, die in manchen Jahren Statt finden, verschwinden würden. Selbst in den 2 Beobachtungsjahren, von denen das zweite einen gleichförmigen Character hatte, zeigt die Construction für dieses eine grössere Annäherung der genannten Curve an die parabolische Form, als für das erstere, in welchem ein minder gleichförmiger Gang der Wärme Statt hatte.

Die niedrigste Temperatur tritt im Mittel um 4 und 5 Uhr Früh ein, sie wächst dann sehr regelmässig bis um 3 Uhr Nachmittag, von wo sie wieder zu sinken anfängt. Die Zeit, innerhalb welcher sie steigt, beträgt 9 Uhr 40 Minuten, die in welcher sie fällt, 14 St. 20 M., es rückt daher die Tageswärme schneller vor, als die Kälte in der Nacht zunimmt.

Im Sommer ändert sich die Wärme viel gleichförmiger als in den übrigen Jahreszeiten, besonders sinkt sie sehr regelmässig von Mitternacht bis 4 Uhr Früh, wo die niedrigste Temperatur Statt findet, und hebt sich eben so regelmässig von da bis 3 Uhr Nachmittags, wo eine schnelle Abnahme der Wärme eintritt.

Im Winter steht die Wärme zwischen 1 Uhr und 2 Uhr Nachm. beinahe still, sinkt dann bis 6 Uhr, von wo sie zu steigen anfängt, bis sie um 2 Uhr ihre grösste Höhe erreicht, von welcher sie mit schnelleren Schritten abwärts geht, als sie zugenommen hatte.

Vorzüglich bemerkenswerth ist der verschiedene

Character des täglichen Ganges der Wärme im April und October, obgleich man gewöhnlich annimmt, als sey die mittlere Temperatur eines dieser zwei Monate der des ganzen Jahres gleich, und es herrsche daher auch eine gewisse Uebereinstimmung in ihrer Temperatur. Im October sind die Morgen und Abende verhältnissmässig warm, während sie im April vorzüglich kalt sind. In die winterliche Temperatur des Aprils mischst sich die Sommerhitze und in die Sommerwärme des Octobers die Winterkälte.

Die Tabellen, welche die Beobachtungen enthalten, lassen auch die Zeit erkennen, in welcher die mittlere Tageswärme herrscht. Diese fand im Jahre 1824 um 9 U. 13 M. Vormittags und um 8 U. 26 M. Nachmittags, im Jahre 1825 um 9 U. 13 M. Vormittags und um 8 U. 28 M. Nachmittags Statt. Man kann daher die Zeit von 9 U. 13 M. Vormittags und 8 U. 27 M. Nachmittags als diejenige betrachten, in welcher sich thermometrische Beobachtungen, aus denen man die mittlere Jahrestemperatur ableiten will, am besten anstellen lassen. Unterbleibt selbst zufällig eine dieser Beobachtungen, so gibt auch die andere allein ein Resultat, das zum Ziele führt. Indess hat doch eine Beobachtung, die des Morgens angestellt ist, vor der den Vorzug, die man Abends macht, weil die Wärme des Morgens regelmässiger wächst, als sie des Abends abnimmt.

Doch sind die genannten Stunden nur diejenigen, die sich aus den mittleren Resultaten eines ganzen Jahres ergeben. Wollte man die mittlere Monatstemperatur aus Beobachtungen abnehmen, die

man in jedem Tage nur einmal macht, so dürfte man dazu nicht die Stunden 9 U. 13 M. Vorm. und 8 U. 27 M. Nachm. wählen, weil die Zeit der mittleren Monatstemperatur auf verschiedene Stunden fällt, wie man aus folgender Tabelle sieht:

Monat.	Stunde, wo die mittlere Temperatur herrscht. Vormittags		Nachmittags	
Jänner	10^h	34′	6^h	57′
Februar	10	2	6	56
März	10	10	8	8
April	9	1	8	26
Mai	9	14	8	40
Juni	9	7	8	24
Juli	8	55	8	40
August	9	0	8	19
September	8	52	8	18
October	9	25	6	48
November	9	39	7	41
December	9	56	6	15

Im Ganzen kann man folgendes Resultat annehmen:

Die Zeit der geringsten Temperatur fällt
im Mittel etwas vor . . . . 5^h 0′
— — der mittleren Morgentemperatur . 9^h 13′
— — der grössten Hitze . . . . . auf 2^h 40
— — der mittleren Abendwärme . . auf 8^h 27′
— — zwischen dem Maximum und
dem folgenden Minimum beträgt . . 14^h 20′
— — zwischen der mittlern Morgen- und Abendtemperatur beträgt . . 11^h 14
— — zwischen dem Minimum und der mittleren Morgenwärme. . . . . 4^h 13

Die Zeit zwischen dem Minimum und der mittleren Abendwärme . . . . . . 8^h 33

VII. Resultate mehrerer, am 17. Juli dieses Jahres angestellter, gleichzeitiger meteorologischer Beobachtungen, dargestellt von A. Baumgartner.

Die königliche Gesellschaft zu Edinburgh hat den Wunsch ausgedrückt, eine Reihe gleichzeitiger meteorologischer Beobachtungen zu besitzen, welche sich auf jede Stunde an einem oder an zwei Tagen des Jahres beziehen. Der Secretär dieser Gesellschaft Dr. Brewster hat die Einladung zu solchen Beobachtungen ergehen lassen, die durch Herrn Haidinger welcher sich damals gerade in Wien befand, auch mir zu Theil ward. In dieser war zum gemeinschaftlichen Beobachtungstage der 17. Juli und der 15. Januar bestimmt, und als zu beobachtende Gegenstände ausdrücklich genannt:

1) Die Temperatur im Schatten. 2) Die Temperatur einer Quelle, 3) der Luftdruck, 4) die strahlende Wärme, 5) der Electricitätszustand der Luft, 6) der Feuchtigkeitszustand der Luft, 7) die Regenmenge, 8) die Geschwindigkeit und Richtung des Windes nebst dem Zuge der Wolken, 9) die Art der Wolken, 10) das Wetter, 11) das Ansehen des Himmels von verschiedenen Weltgegenden.

1.

Ich übernahm es, die Einladung zu diesen Beobachtungen an mehrere Gelehrte und Freunde der

Wissenschaft in den österreichischen Staaten ergehen zu lassen; leider war der Tag der ersten Beobachtung schon zu nahe, als dass die Mittheilung in grosse Entfernungen wirken konnte, dessungeachtet wurde an vielen merkwürdigen Puncten beobachtet. Ich verglich die Data mehrerer mir bekannt gewordener Beobachtungen mit einander, und sah mit Vergnügen, dass sich daraus einige interessante Resultate ergeben. Dieses bestimmte mich, sie für sich bekannt zu machen, obwohl ich nicht im mindesten zweifle, dass die k. Societät in Edinburgh aus einer ungemein zahlreichen Menge von Thatsachen noch weit umfassendere Resultate schöpfen und bekannt machen wird, allein es wird auch selbst dann nicht uninteressant seyn, zu sehen, in wie weit diese Resultate mit den aus viel wenigeren Beobachtungen geschöpften übereinstimmen, oder die Eigenthümlichkeiten unserer Observationsplätze an sich tragen.

2.

Die Beobachtungen, von denen hier die Rede ist, wurden angestellt: in Wien, in dessen Nachbarschaft am Leopoldsberge, in der Nähe von Wienerisch Neustadt am sogenannten Schneeberge, zu Laibach und Görz.

Die Beobachtungsstation in Wien war im botanischen Garten, in welchem zu diesem Zwecke ein äusserst zweckmässiger Platz von dem Vorsteher desselben, dem rühmlichst bekannten Freunde und Kenner der Wissenschaften Freiherrn von J a c q u i n eingeräumt war. Das Barometer hing in einer Höhe von 541 Pariserfuss über der Fläche des adriatischen Meers,

48 Meilen entfernt von demselben, die geographische Länge der Ortes beträgt 33° 59′ die Breite. 48° 12′ Geleitet wurden die Beobachtungen vom genannten Vorsteher des botanischen Gartens und von mir.

Die Beobachtungen am Leopoldsberge leitete der Freiherr von Smolla, Lieutenant im k. k. Bombardier-Corps und Professor der Chemie und Physik daselbst, in einer geographischen Breite von 48° 17′ 26″, in einer Länge von 33° 58′ 30″ östlich von Ferro und in einer Höhe von 1296 Fuss. Letztere war trigonometrisch bestimmt. Die Entfernung vom Meere beträgt 48 M.

Die interesantesten Beobachtungen waren die, welche am Schneeberge unter der Leitung des Herrn Hawliczeck, Hauptmann im k. k. Generalstabe angestellt wurden.

Der Schneeberg ist der ausgezeichnetste Höhenpunct um Wien, und stellt eine kahle Felsenkuppe in der Nähe von Steiermarks Grenze vor. Sein höchster Punct, der Alpengipfel, hat eine Höhe von 6390 P. Fuss, die auf trigonometrischem Wege bestimmt wurde. Sein Gipfel gewährte, da er von allen Seiten die umliegenden Berge beherrcht, den Beobachtern für eine so lange Zeit nicht den nöthigen Unterstand und deshalb wurde zum Beobachtungsorte die etwas abwärts gelegene, von Hirten erbaute Hütte gewählt, die von drei Seiten geschlossen, von der vierten offen ist, und ungefähr 2000 Schritte südöstlich des Alpengipfels liegt. Die Breite dieser Station ist 47° 45′ 45″, die Länge 33° 29′ 12″. Ihre Entfernung vom Meere 38,6 geog. Meilen, und ihre Höhe über die Meeresfläche 5428.4 P. Fuss. Leztere ist aus Barometermessungen abgeleitet.

Die Beobachtungen zu Laibach leitete der Herr Johann Kersnik Professor der Physik am dortigen Lyceum. Sie wurden am sogenannten Rosenbachberge, der 1700 Schritte vom Laibacher Rathhause entfernt ist und 39 W. Klafter über dem Horizont dieser Stadt emporragt, an drei verschiedenen Stellen angestellt, nämlich am Fusse dieses Berges, an der Kapelle. 2 Klafter über dem Laibacherhorizont, in einem 34 Klafter 2 F. höher gelegenen Wohngebäude, und bei der noch 2° 3′ höher liegenden Kirche. Die geographische Breite von Laibach ist mit 46° 2′ die Länge mit 35o 17′, die Seehöhe mit 1800 P. Fuss, und die Entfernung vom Meere mit 10 deutschen Meilen in dem mir zugekommenen Verzeichnisse der Beobachtungen angegeben.

Zu Görz wurden die Beobachtungen vom Herrn Philipp Jordan, Professor der Physik geleitet und in einer Breite von 45° 57′ 30″, in einer Länge von 11° 8′ 30″ östlich von Paris in einer barometrisch bestimmten Höhe von 264 P. Fuss, und in einer Entfernung von 3 $\frac{1}{8}$ geo. Meilen vom Meere angestellt.

Demnach folgen die Beobachtungsorte der Höhe nach auf einander in der Ordnung: Schneeberg, Laibach, Leopoldsberg, Botanischer Garten in Wien, Görz. Der grösste Höhenunterschied beträgt 5164 P. F.

Der geographischen Breite nach liegen diese Stationen in folgender Reihe, von der dem Aequator nächsten angefangen: Görz, Laibach, Schneeberg, Botanischer Garten, Leopoldsberg. Die grösste Breitendifferenz beläuft sich auf 2° 19′ 56″.

Die Entfernung vom Meere ist am grössten für Wien und dem Leopoldsberg, am kleinsten für Görz,

und der grösste Unterschied kommt etwa 45 geo. Meilen gleich.

a. Temperatur der Luft im Schatten.

3.

Die Lufttemperatur im Schatten zeigte sich so wie sie in folgender Tafel angegeben ist. Sie wurde an 80theiligen Quecksilber-Thermometern beobachtet.

Stunde der Beobachtung.	Beobachtungsstation						
	Schnee-berg.	Laibach.			Leo-polds-berg.	Wien.	Görz.
		1ste	2te	3te			
1 Nachts	4.°4 R.	12.5	13 0	12 5	11.5	12.8	15
2	3·8	12.0	13.5	12 5	11.7	12 9	15.4
3	3·7	12.0	13.1	12.7	12.0	12.8	15 8
4	4 0	11.25	12.75	12.25	12.0	12.7	15.2
5	4·4	11.25	12.5	13.0	11.8	12 7	15.8
6	4·8	12.5	14.0	14.0	12.5	13.9	16 0
7	5·7	12.75	14.0	14.5	12.7	13.9	18·0
8	5·3	13.25	16.0	16.5	14.0	14.8	19·3
9	5·7	16.0	16.66.		15.2	15.8	19·5
10	7·2	16.16	17.0	17.5	16.5	16.5	20·2
11	7·4	16.25	17.5	16.5	17·5	17.3	21·0
12 Mittags	8·5	17.21	18.75	18.16	18.0	18 0	21·3
1	10.[illegible]	18.0	19.25	18.0	18.0	17.8	21·5
2	11·3	18.0	20.33	19.0	19.0	17 9	22·5
3	8.8	16.25	18.0	17.75	17.5	17.6	23·2
4	9.0	16.75	19.3	18.0	19.0	18.5	23 0
5	7.5	15·75	17.5	16.5	17.5	17.9	22 6
6	5.8	15.0	17.0	16.3	16.5	17.2	20·3
7	5.0	14.25	17.0	16.8	15.8	16.3	19 4
8	5.5	13·75	15.75	15.0	14.4	15.5	17·8
9	6.5	12.75	15.5	14.75	14.7	14.8	17 6
10	5.9	12 0	15.0	14.25	14.5	14.6	17.0
11	6.0	11.25	14.0	14.16	15.0	13.9	16.7
12 Mitternacht	5.8	11 5	14.0	13 0	14 5	14.0	16.3
Mittl. Temper.	°6.32	14.10	15.48	15 00	15.40	15.42	18.76
			15.17				

4.

Die mittlere Temperatur am Beobachtungstage ist selbst nach diesen wenigen Beobachtungen fast regelmässig desto grösser, je geringer die Erhöhung der Beobachtungsstation über die Meeresfläche ist. Nur Laibach hat eine um 0°,23 R grössere Temperatur als der Leopoldsberg und liegt doch höher als dieser; dafür liegt aber Laibach auf einer hohen Fläche, der Leopoldsberg hingegen ragt völlig isolirt über das ihn umgebende Land hervor, ein Umstand, der anerkannter Weise auf die Temperatur einen Einfluss hat. Der Temperaturunterschied zwischen Görz und dem Schneeberge, als den an Höhe am meisten von einander abweichenden Stationen beträgt 12°. 44 R. Dieser Unterschied kommt aber nicht blos auf Rechnung der verschiedenen Höhe, sondern er wird nebst dieser auch noch durch den Breitenunterschied, die verschiedene Tageslänge, die verschiedene Entfernung vom Meere und die verschiedene Beschaffenheit des Bodens bestimmt.

5.

Die mittlere Wärme des Beobachtungstages hätte man bis auf sehr kleine Differenzen gefunden, wenn man nach der zuerst von A. v. Humboldt gegebenen Regel aus der grössten und kleinsten beobachteten Temperatur das arithmetische Mittel genommen hätte. Auf diesem Wege hätte man als mittlere Temperatur für den Schneeberg 6°.35, für Laibach 15°.75, für den Leopoldsberg 15°,25, für Wien 15,°60 und für Görz 19°.10 gefunden, mithin ein Resultat, das

für ersteren Ort um 0°,103 für den zweiten um 0°,64 für den dritten um 0°,21 für den vierten um 0°.18 und endlich für den fünften um 0°,34 zu gross ist. Minder genaue Angabe hätte man aus den Beobachtungen erhalten, die um 8 Uhr früh, um 3 und 10 Uhr Nachmittags angestellt wurden.

6.

Die mindeste Temperatur tratt im Durchschnitte zwischen 3 und 4 Uhr Morgens ein, nur am Leopoldsberge war am Anfange der Beobachtungen nämlich um 1 Uhr Morgens der geringste Thermometerstand, der aber ohne Zweifel durch den vorhergehenden starken Gewitterregen aus seiner Regelmässigkeit gebracht wurde.

Die grösste Hitze herrschte zwischen 2 und 3 Uhr, nur im botanischen Garten in Wien erreichte das Thermometer erst um 4 Uhr seinen höchsten Stand, welches wohl auch nur durch einen Nebenumstand hervorgebracht worden seyn dürfte.

7.

Um eine recht anschauliche Vorstellung vom Gange der Wärme an allen 5 Beobachtungsorten zu erhalten, wählte ich das längst bewährte Mittel der graphischen Darstellung. Fig. 19 zeigt die Thermometerstände, wie sie sich durch dieses Mittel darstellen *). Man sieht leicht, dass die unterste Curve

*) Von den 3 Thermometerbeobachtungen, die zu Laibach angestellt wurden, ist nur die dritte in die graphische Darstellung aufgenommen worden.

die Temperatur am Schneeberge, die nächstfolgende die am Leopoldsberge, die dritte die zu Laibach, die vierte jene zu Wien, die fünfte aber jene zu Görz darstellt.

Die Gestalt dieser Linien ist nicht uninteressant. Die zu den Temperaturen am Schneeberge gehörige stellt beinahe selbst das Profil eines steilen Berges vor. Die Temperatur steigt daselbst gegen Mittag hin sehr schnell, und sinkt Nachmittags wieder ebenso eilig. Es hat demnach selbst der tägliche Gang der Wärme den Charakter derselben Erscheinung in Polargegenden. Denn man weiss, besonders seitdem Brandes den Gang der Wärme durch das ganze Jahr so schön nachgewiesen hat, dass in nördlichen Gegenden die Wärme im Sommer sehr schnell wächst, aber auch eben so schnell wieder abnimmt.

Nach der Curve vom Schneeberge hat diejenige die meisten Zacken und Winkel, welche der Temperatur zu Laibach entspricht, als der Beobachtungsstation, die auch wirklich nach dem Schneeberge die grösste Seehöhe hat.

Die Curve für Görz hat zwar eine starke Krümmung, jedoch schreitet sie unter allen am meisten stettig fort, und stellt so das Bild eines mildern Clima's dar. Indess ist doch der Unterschied zwischen der höchsten und niedrigsten Temperatur zu Görz um 0°.4 grösser als der am Schneeberge beobachtete; denn ersterer beträgt 8°R, letzterer nur 7°.6.

b. Temperatur einer Quelle.

8.

Quellen wurden nur an 2 Stationen durch alle

24 Stunden beobachtet, nämlich im botanischen Garten zu Wien, und in Laibach. In ersterem Orte wurde stündlich die Temperatur des Wassers geprüft, welches jedesmal einen Augenblick vorher mittelst einer gewöhnlichen Saugpumpe aus dem zur Füllung eines Bassins bestimmten Brunnen gehoben ward. Stets wurde darauf gesehen, dass das erste beim Pumpen hervorkommende Wasser, das schon im Pumpenstiefel gestanden haben mochte, unbenützt abfloss. In Laibach wurden zu jeder Stunde 3 Quellen beobachtet, wovon die ersten gegen Mittag, die zwei anderen gegen 6 Uhr von directen Sonnenstrahlen getroffen werden können.

Am Schneeberge konnte keine Quelle beobachtet werden, auch am Leopoldsberge war die Beobachtungsstation von jeder Quelle zu weit entfernt, als dass man die Beobachtung ihrer Temperatur mit den übrigen Observationen hätte vereinigen können. Indess wurde doch die Temperatur eines 3 Toisen tiefen Kellers beobachtet. Bei Görz wurde einmal der Isonzo, einmal der sogenannte Bischofbrunnen und einmal der Stadtbrunnen beobachtet.

Folgende Tafel enthält die Resultate der Beobachtungen.

Stunde.	Wien.	Laibach.			Leopoldsberg.	Görz.
		1.	2.	3.		
1 Morgens.	11°	12.0	12.5	10.25	—	—
2	11	12.16	12.0	11.0	—	—
3	11	11.75	12.25	11.0	—	—
4	11.2	11.75	11.5	10.75	—	14° b)
5	12.2	11.5	12.0	10.75	—	—
6	14.6	11.5	11.5	10.75	—	—
7	9.2	11.75	11.75	11.25	—	11° c)
8	9.6	11.25	12.0	11.5	—	—
9	9.8	13.25	12.25	11.5	—	—
10	10.0	13.75	11.5	11.75	—	—
11	10.0	15.0	13.25	11.75	—	—
12 Mittag.	9.7	15.5	12.0	11.8	—	9°.6 d)
1	11.2	15.5	11.8	11.16	—	
2	9.7	16.25	12.16	13.16	—	
3	11.2	14.5	11.8	13.16	—	
4	9.6	14.25	12.5	13.16	—	
5	10.4	14.0	12.0	12.75	—	
6	10.2	14.0	11.5	12.75	—	
7	9.4	13.7	12 25	12.7	—	
8	10.0	13.2	12 25	12.2	11.0 a)	
9	11.2	13.0	12.25	12.0	—	
10	11.2	12.5	12.0	11.5	—	
11	11.2	11.75	10.5	11.5	—	
12	11.2	12.0	10.5	11.5	—	
Mittelwerth	10.7	13.12	11.90	11.75		
		12.26				

a) Temperatur der Luft in einem etwa 5 Toisen tiefen gegen Nord offenen Keller.

b) Stadtbrunnen.

c) Isonzo.

d) Bischofsbrunnen.

8.

Die mittlere Jahreswärme beträgt nach Professor Franks Beobachtungen zu Laibach 9°R., die zu Wien ist 8°.2 R. Es ist demnach die mittlere Wärme des Quellwassers am Beobachtungstage an beiden Orten grösser als die mittlere Jahreswärme.

c. Luftdruck.

9.

Der Druck der Luft wurde auf die gewöhnliche Art mittelst eines Barometers gemessen und die gefundene Quecksilbersäule auf die Temperatur von 0° R. reducirt. Folgende Tabelle enthält die Resultate der Beobachtungen im Pariser-Mass. Von den 3 Laibacherbeobachtungen wurden aber nur die Dritte aufgenommen.

Stunde.	Beobachtungsort.									
	Schnee-berg.		Laibach.		Leopolds-berg.		Wien.		Görz.	
	Z.	L.	Z.	L.	Z.	L.	Z.	L.	Z.	L.
1 Mor-	22	9.012	26	9.73	26	9.65	27	5.76	27	9.55
2 gens		8.595		9.73		9.55		5.68		9.55
3		8.608		9.73		9.66		5.70		9.48
4		8.608		9.78		9.57		5.69		9.55
5		8.608		9.34		9.59		5.70		9.48
6		8.938		8.44		9.68		5.68		9.58
7		8.754		8.44		9.67		5.76		9.63
8		8.869		8.00		9.44		6.35		9.55
9		8.899		7.95		9.64		5.76		9.55
10		8.880		7.95		9.74		6.01		9.48
11		9.066		8 44		9.60		5.90		9.50
12 Mit-		9.033		7.95		9.72		5.76		9.50
1 tag		8 915		8.34		9.69		5.75		9.50
2		8.935		6.76		9.58		6.52		9.43
3		9.069		7.64		9.36		6.33		9.25
4		9.064		7.59		9.56		5.67		9.25
5		9.103		8.20		10.32		5.58		9.25
6		9.076		8.37		9.63		5.67		9.48
7		9.117		8.92		9.71		5.70		16.07
8		9.267		9.16		9.50		6.03		10.21
9		9.337		9.66		9.75		6.13		10.31
10		9.392		9.89		9.78		6.07		10.49
11		9.329		9.89		9.76		6.17		10.97
12		9 329		10.70		9.78		6.17		10.57
Mitt. Höhe	22	8.990	26	8.77	26	9.60	27	5.91	27	9.70

10.

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass die Veränderungen im Luftdrucke am Beobachtungstage im Ganzen genommen sehr gering waren. Die grösste Aenderung fand in Laibach Statt, wo sie 3.94 L. beträgt. In Görz betrug sie 1.32 L, am Leopoldsberge

0.96 L. in Wien 0.94 L, am Schneeberg gar nur 0,787 L. Es wäre voreilig aus einer so kurzen Zeit auf die täglichè Periode der Variationen des Luftdruckes schliessen zu wollen. Mit mehr Sicherheit lässt sich aus den 24 Beobachtungen auf den mittleren Luftdruck des Beobachtungstages ein Schluss machen, wiewohl man auch hierin noch einen Fehler begehen kann, weil die Aenderungen desselben, welche zwischen zwei auf einander folgende Beobachtungen fielen, nicht berücksichtiget werden können. Indess kann man doch annehmen, dass man aus diesen 24 Beobachtungen ein der Wahrheit näher liegendes Resultat erhält, als wenn man dieses aus 2 oder 3 Beobachtungen schöpfet. Nimmt man nun den mittlern Luftdruck, der sich aus den angeführten Beobachtungen ergibt, als den mittleren des ganzen Tages an, wo beobachtet wurde; so kann man sehen, wie viel der Fehler betrüge, der begangen würde, wenn man an 2 oder 3 Stunden beobachtet, hieraus das Mittel genommen, und dieses als mittleren Luftdruck des Beobachtungstages betrachtet hätte. Die gewöhnlichsten Stunden, wo Barometerbeobachtungen angestellt werden sind: 8 Uhr Vormittags, 3 Uhr und 10 Uhr Nachmittags. Nach diesen Stunden erhielte man für:

den Schneeberg	22 Z. 8.990 L. mithin			als Fehler	— 0.120 L.
Laibach	26 — 8.770	—	—	+ 0.26	=
den Leopoldsberg	26 — 9.60	—	—	+ 0.07	=
Wien	27 — 5.91	—	—	— 0.34	=
Görz	27 — 9.76	—	—	— 0.06	=

Die geringe Differenz der nach beiden Methoden gefundenen mittleren Barometerhöhe für Wien

und dem Leopoldsberge darf noch nicht als Empfehlung obiger Beobachtungsstunden angesehen werden; denn der 17. Juli 1826 war einer jener ruhigen Tage, an welchen, sich das Barometer um nicht viel änderte, wo man also fast den Stand zu jeder Stunde als den mittleren des ganzen Tages ansehen kann; bei grossen Variationen könnte die Differenz bedeutender werden. Dieses zeigt schon der Umstand, dass die auf beiden Wegen gefundenen Barometerhöhen für Laibach ziemlich stark differiren, wo auch die Variationen des Barometers grösser waren.

Kleiner fallen diese Differenzen aus, wenn man um 10 Uhr Früh und um 10 Uhr Abends den Luftdruck beobachtet, und aus beiden Resultaten das Mittel nimmt. Da erhält man für den Schneeberg —0.146, für Laibach — 0.15, für den Leopoldsberg — 0.01 für Wien — 0.13 und für Görz — 0.32 als Fehler. Am nächsten erhält man den mittleren Luftdruck aus zwei Beobachtungen, die um 8 Uhr Früh, und um 9 Uhr Abends angestellt wurden. Man enthält nämlich den mittleren Druck am Schneeberg um 0.113 L, zu Laibach um 0.06 L. am Leopoldsberge um 0.005 L. zu Wien um 0.085 L. zu hoch, und in Görz um 0.03 L. zu gering. Wahrscheinlich gibt es für jede Gegend eine andere Stunde, in welcher der Luftdruck dem mittleren am nächsten ist.

11.

Um eine bessere Uebersicht des Ganges der Barometer in den Beobachtungsstationen zu bekommen, und die Richtung und Stärke der dieselben bestimmenden Ursachen besser beurtheilen zu können, habe

ich folgende Tabelle entworfen, welche die stündlichen Aenderungen des Luftdruckes in Hunderttheilen einer Pariser Linie angibt. Das Zeichen — bezeichnet ein Fallen des Barometers; wo kein Zeichen vorgesetzt ist, deutet die Zahl auf Steigen. o zeigt an, dass sich das Barometer nicht geändert habe.

Zeit.	Ort der Beobachtung.				
	Görz.	Laibach.	Schneeberg.	Wien.	Leopoldsberg.
von 1 bis 2 U. früh	0	0	—42	— 8	—10
2— 3	— 7	0	1	2	11
3— 4	7	0	0	— 1	— 9
4— 5	— 7	— 39	0	1	2
5— 6	10	10	33	— 2	— 1
6— 7	5	0	—18	8	— 1
7— 8	— 8	— 44	11	51	—23
8— 9	0	— 5	3	—51	20
9—10	— 7	0	— 1	25	10
10—11	2	49	18	—11	—14
11—12	0	— 49	— 3	—14	12
12— 1	— 0	39	—12	— 1	— 3
1— 2	7	—158	2	77	—11
2— 3	—18	88	13	—19	—22
3— 4	0	— 5	0	—66	20
4— 5	0	61	4	— 9	82
5— 6	23	17	— 3	9	—69
6— 7	59	55	4	3	8
7— 8	14	24	11	33	—21
8— 9	10	50	7	10	25
9—10	18	23	6	— 6	3
10—11	8	0	— 7	10	— 2
11—12	0	81	0	0	2

Die Fortsetzung folgt.

VIII. Verbesserte und neue physikalische Instrumente.

1.

Buntens verbessertes Reisebarometer.

(Annales de l'industrie nat. et étrang. N. 78.)

Es ist sehr schwer, ein gewöhnliches Reisebarometer zu transportiren, ohne dass Luft hinein käme. Gay-Lussac hat dadurch, dass er am unteren Theile des Instrumentes ein Haarröhrchen anschmelzen lies, diesem Uebel zwar zum Theile, aber nicht ganz vorgebeugt. Bunten glaubt diesen Zweck durch die Einrichtung der Barometerröhre erreicht zu haben, welche in Fig. 15 vorgestellt ist, und der übrigens die von Gay-Lussac angegebene Einrichtung zu Grunde liegt.

Die Röhre ab endet sich unten in eine haarröhrchenförmige Verlängerung bd vom 8–9 Z. Länge. Ein Ende dieses Ansatzes reicht in den Heber cefg, wovon der Theil fg genau dasselbe Caliber hat, wie die Röhre in ab. Das Ende c dieses Hebers wird an das Haarröhrchen 2—3 Z. ober dem Ende d angeschmolzen, nachdem man vorläufig die Röhre ai bis i mit Quecksilber gefüllt und hierauf in der Röhre gekocht hat, um Luft und Feuchtigkeit zu vertreiben. Giesst man hierauf durch die Oeffnung in o neues Quecksilber nach, um den Theil cdef damit anzufüllen, so wird man leicht durch Erwärmung des Stückes ab das Quecksilber von i bis d steigen machen, um so die ganze Säule ad luftfrei zu erhalten. Endlich schmelzt man den Heber in g zu, und lässt der Luft zu ihrem Aus- und Eintritte

nur die kleine Oeffnung o, durch welche, wie in Gay-Lussac's Barometer, kein Quecksilber entweichen kann.

Gelangt nun ein Luftbläschen durch den Hals e in den Heberarm, so kann es doch nicht in das Haarröhrchen di emporsteigen, weil es gar so leicht nach c gelangen kann. Wiewohl nun dadurch die Quecksilbersäule unterbrochen zu seyn scheint, so hat dieses doch auf den Unterschied der Länge der Quecksilbersäulen beider Arme keinen Einfluss. Denn drückt z. B. die in c hineingelassene Luft das Quecksilber so weit herab, dass es dadurch im anderen Schenkel von f bis f′ steigen muss, so kann doch die äussere Luft, deren Elasticität dadurch nicht verändert worden ist, noch immer dieselbe Quecksilbersäule tragen, und es muss darum auch die Säule in ab von a bis a′ steigen, so dass aa′ = ff′ ist, mithin bleibt die Barometerhöhe dieselbe. Uebrigens ist es auch sehr leicht, die Luft aus c zu vertreiben. Bunten sagt, zwei solche Barometer, die einen Monat lang beobachtet wurden, blieben durchaus übereinstimmend, wiewohl in einem derselben bei c eine grosse Luftblase war, und die Instrumente dem Einflusse verschiedener Temperaturen ausgesetzt waren.

2.

Mills neues Pyrometer.

(Annal. de l'indust. nat. et étrang. N. 77.)

Dass von Mill angegebene Pyrometer ist in Fig. 16 abgebildet. Es besteht aus einer Röhre B von Platin, die inwendig eine völlig cylindrische, eine Linie oder etwas mehr im Durchmesser haltende Oeffnung hat,

an deren unterem Ende sich eine hohle Kugel A von demselben Metalle befindet, welche etwa einen halben Zoll innern Durchmesser hat. Das andere Ende ist mittelst einer Aufsatzröhre an die Luftprobe befestiget, die eine heberförmig gebogene Röhre CD vorstellt. In D ist diese Röhre mit einer Kugel versehen, welche dieselbe Capacität hat, wie die an der Platinröhre befindliche; auch enthält sie eine geringe Menge Quecksilber, welches den Raum in der Biegung gewöhnlich einnimmt. Die auf einer Glas- oder Metallplatte angebrachte Scale EF ist wie die eines Thermometers graduirt. Wird die Luft in der Platinkugel erhitzt, so dehnt sie sich aus, und treibt die Quecksilbersäule in der Glasröhre gegen die Glaskugel D hin.

Damit die Platinröhre- und Kugel durch das offene Feuer keinen Schaden leide, gibt man sie beim Gebrauche in ein cylinderförmiges Thongefäss, füllt den übrigen Raum mit Sand oder gepulverten Kohlen aus, und deckt dieses noch durch Thonstücke.

3.

Meikle's heberförmiges Hydrometer zur Bestimmung der Temperatur, wo das Wasser die grösste Dichte hat etc.

(Phil. Mag. and Journ. sept. 1826)

Das von Meikle angegebene Hydrometer ist in Fig. 17. abgebildet. Man sieht daraus, dass es aus einer in Form eines doppelten Hebers gebogenen Glasröhre besteht. Will man dieses Instrument zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten benützen, so schliesst man mit dem Finger oder mittelst eines

Korkstoppels einen Arm desselben, und giesst in den anderen reines Wasser. Dieses kann im zweiten kürzeren Arme nur bis zu einer geringeren Höhe steigen weil die Luft aus selben nicht entweichen kann. Hierauf schliesst man auch den längeren Arm des anderen Hebers durch dasselbe Mittel, das man beim ersten anwendet, öffnet hierauf den ersten, und füllt durch ihn diejenige Flüssigkeit ein, deren specifisches Gewicht man finden will. Auch in diesem wird die Flüssigkeit nicht in beiden Armen gleich hoch stehen können. Hält man nun das Instrument vertical, und misst den Höhenunterschied der beiden Säulen sowohl einer als der anderen Flüssigkeit, so gibt ihr Verhältniss das ihrer specifischen Gewichte an. Zur grösseren Richtigkeit im Gebrauche versieht man die vier Arme mit einer Scale, an der sich sehr kleine Theile leicht messen lassen.

Um beim Ausgiessen beide Flüssigkeiten nicht mit einander zu vermischen, biegt man die beiden offenen Arme etwas aus der Ebene der übrigen heraus, so, dass sie bei der horizontalen Lage des Instrumentes etwas höher liegen, als der übrige Theil.

Richtet man dieses Instrument so ein, dass die horizontale Verbindungsröhre beider Heber lang genug ist, so kann man jeden derselben in ein eigenes Bad setzen, sich bis zu einer bestimmten Temperatur erwärmen, und so, indem man in beide Heber reines Wasser giesst, die Temperatur finden, bei welcher das Wasser die grösste Dichte hat. Dieses geschieht dadurch, dass man die Temperatur sucht, bei welcher eine wirksame Säule, d. i. der Unterschied der Säulen in einem Heber, am kürzesten ist, oder indem

man zwei Temperaturen sucht, bei denen die Säulen gleich lang sind. Im letzteren Falle liegt die Temperatur der grössten Dichte nahe in der Mitte der zwei beobachteten. Man findet dann aus einer Reihe solcher Beobachtungen gewiss diese Temperatur genau.

4.

Blackadder's registrirendes Thermometer.

(The Edinb. Jour. of Science N. IX.)

Dieses Instrument besteht aus 2 Thermometern, deren Röhren an dasselbe Bret befestiget sind, wovon aber doch jedes eine eigene Scale hat.

Eine der Röhre Fig. 18) a ist wie ein gewöhnliches Thermometer ganz geschlossen, und mit einer gewöhnlichen Scale versehen; die andere b ist an einem Ende c offen und gerade abgeschnitten. Ueber dieses wird eine kurze, mit einer Kugel versehene weitere Röhre gesteckt, die sich genau daran anlegt, und in der Kugel einen Quecksilbertropfen enthält; auch sind diese beiden Röhre so über einander gesteckt, dass die Kugel der einen genau dort anfängt, wo die andere aufhört. Sie sind durch ein Bischen farbenlosen Firniss mit einander verbunden. Die Scale der letzteren Röhre beginnt an ihrem offenen Ende e, und ist von da angefangen mit 1, 10, 20 etc. numerirt.

Hält man dieses Instrument vertical; so deckt der Quecksilbertropfen in der Kugel c die Oeffnung c der Röhre b. Erwärmt man nun das Quecksilber in p mit der Hand, so steigt es bis an das offene Ende, vermengt sich mit dem Quecksilbertropfen in c, und bleibt in dieser Vereinigung so lange, als der Appa-

rat vertical steht. Setzt man ihn in dieser Stellung der freien Luft aus, die z. B. eine Temperatur von 60° F. hat, so entspricht das obere Ende der Quecksilbersäule in a diesem Wärmegrade, während das Quecksilber in b am Anfangspuncte seiner Scale bleibt, und zwar in Vereinigung mit dem Tropfen in c.

Gibt man nun dem Instrumente eine horizontale Lage, so verlässt der Quecksilbertropfen in c augenblicklich die Oeffnung der Röhre b und diese Röhre ist vollkommen mit Quecksilber gefüllt. Werden in diesem Augenblicke beide Thermometerkugeln n und p mit einer schnell verdünstenden Flüssigkeit gefüllt, wie z. B. mit Aether, Alkohol etc., so sinkt das Quecksilber in beiden um gleich viel und bleibt so lange unter dem Puncte, welcher der Temperatur der Luft entspricht, als die verdünstende Flüssigkeit die Kugeln deckt. Gesetzt, es käme auf Rechnung der Verdünstung ein Wärmeverlust von 10° F., während die Luft noch immer 60° F. hat. Dann zeigt die Quecksilbersäule in a 50° F. und die in b 10° F. Ihre Summe, nämlich 10 + 50, gibt also die Temperatur der Luft an, welche im Augenblick Statt fand, als das Instrument die horizontale Lage annahm. In diese Lage kann es in Abwesenheit eines Beobachters zu einer bestimmten Stunde durch einen einfachen Mechanismus versetzt werden, der mit einer Uhr in Verbindung steht, und die verdünstende Flüssigkeit kann in einem Gefässe enthalten seyn, das mittelst einer Klappe verschlossen ist, und mittelst Haarröhrchen die Flüssigkeit an einen feinen Haarpinsel abgibt.

Gibt man dem Halse der Röhre, an welcher die

Kugel c angebracht ist, eine Krümmung, damit das angesteckte Glasstück wie eine kleine Retorte aussieht, so braucht man den Apparat gar nicht von der verticalen Lage in eine horizontale zu versetzen, um den Quecksilbertropfen in c von dem Quecksilber in der Thermometerröhre b zu trennen; man erreicht diesen Zweck schon dadurch, dass man den horizontal liegenden Apparat um 180° dreht und dadurch den früher aufwärts gekrümmten Hals der kleinen Retorte in einen abwärts gekrümmten verwandelt.

IX. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

Optik.

Die optischen Wissenschaften haben in der neueren Zeit viele Männer von ausgezeichneten Talenten und umfassenden Kenntnissen beschäftigt. Die Entdeckung mehrerer sehr wichtiger Wahrheiten und ein bedeutendes Vorrücken in der Kunst, optische Instrumente zu verfertigen, sind die Früchte ihrer Bemühungen.

Lichtsauger. Leslie *) hat das von Planeten und vom Monde zu uns gelangende Licht einer näheren Betrachtung unterzogen, und findet sich bewogen, den Mond für einen phosphorescirenden Körper

*) Bibl. univers. 1825. Avril.

zu halten. Er gelangte zu dieser Behauptung durch folgende Verknüpfung physikalischer Sätze:

Wären die Planeten vollkommen kugelförmige Körper, welche das Licht wie eine spiegelnde Fläche reflectiren, so würde jeder derselben ein kreisförmiges Sonnenbild machen, dessen Durchmesser von der relativen Lage beider Körper gegen einander abhinge. Unter dieser Vorausetzung erschiene un. unser Planetensystem wie eine Gruppe kleiner Sonnen ohne Phases. Man kann leicht aus den Gesetzen der Katoptrik deduciren, dass jeder Lichtstrahl von einem Puncte hinter der Oberfläche des Planeten zu kommen scheinen müsste, dessen Entfernung von dieser Oberfläche dem halben Radius des Planeten gleich wäre. Das so durch Reflexion gebildete Sonnenbild würde vom Mittelpuncte des Planeten aus unter demselben Winkel erscheinen, wie die Sonne selbst. Daher müsste sich der Durchmesser eines Planeten zu dem des genannten Bildes bei seiner oberen Conjunction, wie die Entfernung dieses Planeten von der Sonne zum halben Sonnenhalbmesser verhalten. Auf diese Weise erschiene die Venus mit einem Durchmesser, welcher $\frac{1}{317}$, Jupiter mit einem, der $\frac{1}{2712}$ des Sonnendurchmessers beträgt.

Nach derselben Voraussetzung müsste der Mond gleich nach dem Neumonde wie ein leuchtendes Fleckchen erscheinen, welches immer grösser wird und endlich im Augenblick des Vollmondes $\frac{1}{458}$ des Sonnendurchmessers zum Diameter hätte. Selbst wenn der Mond alles Licht, das ihm die Sonne sendet, reflectirte, würde seine Beleuchtung nur $\frac{1}{2100000}$ von der der Sonne betragen. Man würde auch nie seinen Durch-

messer und seine Flecken kennen gelernt haben, wenn obige Voraussetzung in der Wirklichkeit vorhanden wäre.

Hieraus ergibt sich nun der unwidersprechliche Schluss, dass die Planeten und der Mond eine matte Oberfläche haben müssen, wenn sie überhaupt ihr Licht der Sonne verdanken. Allein die Lichtmenge, welche eine matte weisse Fläche reflectirt, ist in jedem Fall äusserst gering. Nach Bouguer's Erfahrungen reflectirt Papier vom senkrecht auffallenden Licht nicht mehr als den $\frac{1}{150}$sten Theil, und noch viel weniger, wenn das Licht schief auffällt. Wäre die Oberfläche des Monds ganz gleichförmig weiss, so würde kaum mehr der 300ste Theil der auf ihn fallenden Sonnenstrahlen zurückgesendet werden, aber diese Oberfläche ist sehr unregelmässig und mit dunklen Stellen gleichsam übersäet. Man kann daher wohl obige Zahl auf $\frac{1}{500}$ vermindern. Demnach würde die Lichtmenge, die uns der Mond zusendet 500×210000 oder 105 Millionen mal kleiner seyn, als die, welche wir von der Sonne erhalten. Nun ist aber das Mondeslicht ohne Vergleich stärker als diese Rechnung angibt. Bouguer schloss aus seinen Beobachtungen, dass das Mondlicht dem 250000sten oder 300000sten Theil des Sonnenlichts gleich komme, und Leslie fand es gar mit seinem Photometer dem 150000ste Theil desselben gleich. Man muss daher annehmen, dass das Sonnenlicht an der Oberfläche des Mondes fast ganz absorbirt wird, aber hierauf am Mondeskörper eine Wirkung ausübe, welche eine viel stärkere Lichtaussendung zur Folge hat. Diese Entwicklung des Lichtes muss an einigen Stellen schwä-

cher an anderen ausnehmend stark seyn, so dass uns jene als dunkle, diese als leuchtende Flecken erscheinen. Demnach hätte der Mond eine Aehnlichkeit mit dem Bologneserstein, und wäre ein wirklicher Lichtmagnet, wie dieser Stein.

Osan *) hat mehrere Leuchtsteine von vorzüglicher Stärke und Schönheit kennen gelehrt. Wird arseniksaurer Baryt durch Zerlegung des salpetersauren Baryts mit arseniksaurem Kali bereitet, mit Tragant zu Pasten geformt und dann im Kohlenfeuer geglüht, so übertrifft er im Leuchten den Bononi'schen Phosphor weit. Eben so erhält man einen blau leuchtenden Phosphor, durch Calciniren der Austerschalen und Behandeln derselben mit Realgar, wie Canton'schen Phosphor. Das stärkste Licht soll aber ein Phosphor zeigen, den man erhält, wenn man Austerschalen auf gleiche Weise mit Schwefelantimon behandelt.

Becquerel **) erhielt durch Lehmann ein besonderes Exemplar von Flussspath, der in Sibirien gefunden wurde, und im Dunkeln ein merkwürdiges Phosphoresciren zeigte, welches mit der Temperatur an Stärke zunahm, und auch unter Wasser Statt fand. Ja in diesem wird die Lichtentwickelung noch stärker, so dass ein solcher Körper in siedendem Wasser, das in einem gläsernen Gefässe enthalten ist, Licht genug durch das Gefäss sendet, um eine Schrift lesen zu können. Im siedenden Oehl ist dieses

---

*) Kastners Archiv. B. IV. S. 347.

**) Le Globe. N. 98. August 1826.

Licht noch stärker, in siedendem Quecksilber ist die Phosphorescenz so stark, dass man selbst noch in einer Entfernung von 5 Z. lesen kann.

Durchsichtigkeit des Weltraumes. Der berühmte Olbers in Bremen hat in einem sehr schönen Aufsatze *) gezeigt, dass der Weltraum nicht für vollkommen durchsichtig angenommen werden dürfe. Es ist wohl höchst wahrscheinlich, dass in jener unendlichen Ferne, in die kein bewaffnetes Auge zu dringen vermag, eben so wie in dem Raume, der uns zu durchspähen erlaubt ist, Fixsterne und Sonnen existiren, und dass daher die Zahl dieser so gross ist, dass sie das ganze Firmament bedecken würden, wenn sie in einer für uns noch wahrnehmbaren Ferne existirten. Wäre nun der Weltraum ganz vollkommen durchsichtig, so müsste das ganze Firmament wie der Sonnenkörper glänzen, und man würde die Planeten und den Mond nur als dunkle Scheiben daran wahrnehmen. Da nun dieses weit von der Erfahrung abweicht, so sind wir gezwungen anzunehmen, dass das Licht auf seiner langen Reise von seiner Quelle bis in unser Auge geschwächt werde und daher der Weltraum nicht völlig durchsichtig sey. Olbers meint nicht sehr von der Wahrheit abzuweichen, wenn er annimmt, dass das Licht, welches vom Sirius ausgeht, abgesehen von der Divergenz der Strahlen, blos wegen der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit des Raumes auf dem Wege bis zu uns $\frac{1}{800}$ verliere. Dieser Verlust ist hinreichend gross, um uns das Firmament so erscheinen zu

*) Astronomische Neuigkeiten herausgegeben von Schuhmacher.

machen wie es die Erfahrung zeigt, ungeachtet unendlich viele Sterne im Raum existiren.

Absorption des Lichts in gefärbten Mitteln. Brewster und Herschel fanden es zum Behufe ihrer wissenschaftlichen Untersuchungen nöthig, sich homogenes Licht zu verschaffen, ersterer um damit microscopische Gegenstände beleuchten zu können, und dadurch dem Einflusse der Farbenzerstreuung in Microscopen zu entgehen, letzterer um einen Vergleichungspunct für anderes Licht zu haben. Sie bedienten sich zu diesem Zwecke verschieden farbiger Glässer und anderer durchsichtiger Substanzen, und waren desshalb genöthiget, die Wirkung farbiger Mittel auf das Farbenbild zu untersuchen. Dabei gelangten sie zu mehreren wichtigen Resultaten über diese Wirkung, die im Allgemeinen in Folgendem bestehen*):

Jedes gefärbte Mittel absorbirt gewisse Strahlen des Farbenbildes vorzugsweise. Die Menge der absorbirten Strahlen richtet sich bei übrigens gleichen Umständen nach der Dicke des Mittels. Ist dieses homogen, so nimmt die Menge des durchgelassenen Lichts in einer geometrischen Progression ab, wenn die Dicke desselben in einer arithmetischen Progression zunimmt.

Jedes Mittel wirkt nach einem anderen Massstabe auf die verschiedenen Strahlen des Farbenbildes, so dass die genannte Progression, nach welcher die Dicke desselben wächst und die Menge des durchgelassenen Lichtes abnimmt, für jeden Grad der Brech-

*) Transact. of the royal soc. of Edinburgh. Tom. IX.

barkeit eine andere ist. Daher kommt es auch, dass sich die Farbe eines Mittels mit seiner Dicke ändert. Die Strahlen, welche am wenigsten absorbirt werden, dringen am weitesten in das Mittel ein, und sind bei einer gewissen Dicke desselben die einzigen, welche es durchdringen.

Man würde irren, wenn man glaubte, dass sich die Wirkung gefärbter Mittel auf verschiedene farbige Strahlen nach einem Gesetze richtet, dass stetig sich ändert, wie die Brechbarkeit der Lichtstrahlen grösser oder kleiner wird.

Brewster überzeugte sich auch vom Einfluss der Wärme auf die Aenderung der Farben eines Mittels, und fand, dass das Absorptionsvermögen bei einigen gefärbten Gläsern durch Wärme abnahm, bei andern aber wuchs, und erklärt daraus die Farbenänderung, welche manche Körper, wie z. B. Mennig, Quecksilberperoxyd, in der Hitze erleiden. Mit diesem steht das in nächster Verbindung, was Soret *) von den Farben des Topases berichtet. Die Herren Dumas und Raisin haben nämlich zu Genf eine Fabrik von falschen Edelsteinen errichtet, und in ihrer Fabrication grosse Fortschritte gemacht. Es ist bekannt, dass der brasilianische Topas durch Brennen seine Farbe ändert, und vom Orangegelben in das Violette übergeht, wo er dann gebrannter Topas, wohl auch Rubin genannt wird. Aehnliche Farbenänderungen bewirkten obige Fabriksinhaber auch an gefärbten Gläsern. Wird blassgelbes Glass in kleine Stücke zerschlagen, und

*) Mémoire de la société de physique etc. de Genève Tom. I. oder Kastners Archiv. B. II. S. 438.

einer hohen Temperatur ausgesetzt, so ändert es die Farbe, es geht durch Dunkelgelb in Orange über, und in dem Augenblicke, wo es zu schmelzen anfängt, gar Violett mit vorwaltendem Roth. Soret fand bei Wiederhohlung dieses Versuches, dass sich der Farbenwechsel nach der Newtonschen Scale richtet. Vom lichtbraunen, den blauen Beryll nachahmenden Glase fanden Dumas und Raisin, dass es in Stücke zerschlagen, und einer verstärkten Hitze ausgesetzt, durch dass Blassblaue in das Blassgrüne und endlich in das Gelblichgrüne überging. Erkalten diese Stücke, so erscheinen dieselben Farben wieder in umgekehrter Ordnung, und das Glas wird zuletzt wieder blassgrün. Wurde die Erhitzung bis zum Rothglühen getrieben, so erschien nach dem Gelblichgrünen ein Blassgelb, und endlich Orangegelb, welches auch bis zum gänzlichen Erkalten verblieb.

Farbe undurchsichtige Körper. Die Farbe undurchsichtiger Körper hat man seit Newtons Untersuchungen fast durchgehends aus der Beschaffenheit der feinsten Blättchen an der Oberfläche derselben erklärt, und angenommen, es dringe ein Lichtstrahl bis zu einer gewissen Weite in dieselbe ein, und an der Grenze erleiden die einen oder die anderen farbigen Bestandtheile desselben oder auch mehrere zugleich eine Reflexion, kommen so ins Auge, und bestimmen die Farbe des Gegenstandes. Es wurde demnach der mechanischen Beschaffenheit der äussersten Fläche der Körper kein wesentlicher Einfluss auf deren Farbe beigelegt. Allein seit Young das Interferenzprincip aufgestellt, und Fresnel es durch directe Versuche erwiesen hatte, musste man auch der äussersten Fläche der

Körper einen Einfluss auf die Farbe, unter welcher sie erscheinen, gestatten, weil sie die Art der Durchkreutzung des reflectirten Lichtes bestimmt, bei welcher einige Strahlen sich vermehren, andere hingegen sich verstärken können. Brewster hat dieses sehr schön an Perlmutter nachgewiesen, indem er zeigte, dass ihr Farbenspiel von der wellenförmigen Gestalt der Oberfläche abhängig sey. Es fehlte nun noch ein Fall, bei dem erwiesen werden könnte, dass bei einer solchen Durchkreutzung der von einem Körper reflectirten Strahlen alles Licht aufgehoben würde, und er daher schwarz erschien. Ein solcher Fall kam Brewster *) vor. Er fand, dass ein Stück eines etwas grossen Rauchtopases, dass man durch Zerschlagen eines ganzen Krystalls erhielt, auf den Bruchflächen ganz schwarz erschien, als wären sie mit einem schwarzen Pigment überzogen. Man kann nicht wohl zweifeln, dass dieses Phaenomen durch Interferenz des Lichtes an den feinen Streifen der Oberfläche erzeugt werde, weil es sogleich verschwand, wenn man das Krystallstück in Aniesöhl tauchte, welches dasselbe Brechungsvermögen hat, wie der Rauchtopas, und wieder zum Vorschein kam, wenn es herausgenommen und abgetrocknet wurde.

Farbige Schatten. Da in vielen Zweigen des menschlichen Wissens sehr wohl bewanderte Zschokke **) hat in der naturforschenden Gesellschaft zu Aarau über die farbigen Schatten, ihr Entstehen und Gesetz

*) Annals of philosophy 1824. Sept.

**) Ueber die farbigen Schatten, ihr Gesetz und Entstehung. Aarau 1826.

eine Vorlesung gehalten, deren Inhalt für die Optik von Wichtigkeit ist. Er beweiset darin:

1) Dass die farbigen Schatten weder Augentäuschung, wie Rumford wollte, noch etwas bloss subjectives, wie Grotthuss glaubte, seyen, sondern dass sie so, wie die schwarzen oder grauen Schatten objective Realität haben, 2) dass es in der Natur so viele farbige Schatten gebe, als Abstufungen im prismatischen Farbenbilde vorhanden sind; 3) Dass ihre Farbe immer auf eine bestimmte Farbe im Newtonschen Farbenkreise hinweise, von der sie herstammt. So wie das weisse (farblose) Licht einen schwarzen (farblosen) Schatten macht, eben so hat jedes farbige Licht seinen eigenen farbigen Schatten, und beide Farben, die des Lichtes und die des Schattens bilden mit einander immer einen Gegensatz.

Hält man, sagt Zschokke, der auf- oder untergehenden Sonne die Hand so entgegen, dass der Schatten darüber auf weisses Papier fällt, das von ihr etwa 6 Zoll entfernt ist, so erscheint dieser Schatten seladongrün, blau oder violett; der grüne hat oft einen violletten, der blaue einen feuerfarbnen oder gelben, der violette einen grünen Rand, vorzüglich wenn man die Finger etwas ausspreitzt. Dieser Schatten wird bei einerlei Sonnenhöhe und Luftdichte stets auf dieselbe Art wahrgenommen, jedes Auge erkennt ihn auf einerlei Weise ohne Rücksicht auf eine vorhergegangene Farbenempfindung, und jeden Tag mit denselben sich allmählig ändernden Tönen, welche das Steigen oder Sinken der Sonne begleiten; er verlängert und verkürzet sich, und begleitet die Hand in allen ihren

Bewegungen. Man kann daher wohl nicht zweifeln, dass er ein wahrer Schatten sey.

Um auszumitteln, von welcher Art die Farbe des Schattens, der jedes Licht von bestimmter Farbe begleitet sey, nahm Z. grosse farbige Glasscheiben und liess durch sie im Freien oder im hellen Zimmer die Sonnenstrahlen gegen eine weisse Fläche reflectiren, so dass diese die Färbung der Glasscheibe annahm. Wurde nun zwischen das Licht und die dasselbe reflectirende Fläche ein dunkler Körper gestellt, so bildet er einen Schatten. Da zeigte sich

im rothen Lichte	der Schatten	hellblau
— orangen	- - -	etwas dunkler blau
— gelben	- - -	blau, röthlichblau
— grünen	- - -	violett, purpurn
— hellblauen	- - -	roth
— dunkelblauen	- - -	orange
— violetten	- - -	grün.

Vergleicht man diese Farben mit denen im Newton'schen Farbenkreise, so überzeugt man sich, dass jede Farbe des Lichtes immer derjenigen gerade gegenüber steht, welche der von ihr erzeugte Schatten hat.

Trechsel *) unterscheidet die subjectiven farbigen Schatten von den objectiven. Als subjective nimmt er jene an, die auf einer eigenthümlichen Disposition des Sehorganes beruhen, welches durch den längern oder stärkern Eindruck einer Farbe die fernere Empfänglichkeit für dieselbe verliert. Die objectiven farbigen Schatten entstehen durch das in einen Schatten

*) Biblioth. univers. Mai 1826.

geleitete fremdartige Licht. Sie sind eigentlich Halbschatten. Nach diesen könnten farbige Schatten nicht durch ein Licht entstehen, allein es ist zu deren Entstehen nicht immer ein eigentlicher Schatten nothwendig, sondern es reicht dazu eine starke Differenz in der Beleuchtung zweier weisser Flächen hin.

Fähigkeit des Auges, sich verschieden entfernten Gegenständen anzupassen. Wiewohl viele ausgezeichnete Gelehrte den hier bezeichneten Gegenstand behandelt haben, so war man darüber doch noch völlig im Dunkeln, bis Brewster *) wenigstens über einige dahin gehörige Puncte Licht verbreitete. Er entschied durch bestimmte Versuche, dass die schon längst bekannte Verengung der Pupille, welche die Adjustirung des Auges für nahe Gegenstände begleitet, das deutliche Sehen nicht durch ein Verringern der Oeffnung, sondern durch eine andere dieselbe begleitende Veränderung hervorbringe, sondern dass das Vermögen, sich für nahe und entfernte Gegenstände gehörig einzurichten, zweifach sey, wovon eines vom Willen des Sehenden, das andere aber vom Lichtreitz abhängt und dass letzteres die nöthige Adjustirung des Auges bewirkt, wenn auch ersteres mangelt. Brewster meint nun die Behauptung aufstellen zu dürfen, dass die Fähigkeit des Auges, sich der Entfernung der Gegenstände anzupassen von den mit der Basis der Iris in Berührung stehenden Theilen erzeugt wird und dass diese Adjustirung, mittelst des Mechanismus an der Basis der Iris durch

*) Edinb. journal of science N. I. oder Poggendorffs Annalen II. Bd. S. 271.

Vergrösserung des Abstandes der Krystallinse von der Retina bewirkt werde.

Sehen unter Wasser. Schon der berühmte Huyghens hat sich die Frage aufgeworfen, ob man unter Wasser deutlich sehen kann, und sie aus theoretischen Gründen verneinend beantwortet. La Hire meinte dasselbe aus einem von ihm angestellten Versuche schliessen zu können. Munke,*) hat dieses von Neuem auf theoretischem Wege untersucht und Huyghens Behauptung bestätiget gefunden. Er substituirte in die gewöhnliche Formel, welche die Brechungsgesetze des Lichtes in Linsen enthält, die Werthe der Brechungsverhältnisse und Krümmungen, wie sie die genauesten Bestimmungen für das menschliche Auge angeben, und fand, dass die Vereinigungsweite der aus einer Entfernung von 10 Zoll aus Wasser auf die Hornhaut fallenden Lichtstrahlen, in so fern sie von der Wölbung der Cornea und dem Brechungsvermögen der wässerigen Flüssigkeit anhängt, negativ sey, d. i. dass diese Strahlen sich gar nicht vereinigen, woraus man sieht, dass die Krystalllinse die Vereinigung solcher Strahlen auf der Retina nicht bewerkstelligen kann. Um unter Wasser deutlich zu sehen, müsste selbst das gesunde Auge mit einer Loupe versehen seyn. Damit ist aber die Möglichkeit, einen Gegenstand, der im Wasser liegt und gegen den Grund absticht, wahrzunehmen, keineswegs geläugnet, es geschieht dieses aber nur vermög eines Lichtscheines, keineswegs vermög eines deutlichen Bildes im Auge

---

*) Poggendorffs Annalen. B. II. S. 257.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Gesetze des Gleichgewichts, auf eine neue Art entwickelt, vom Professor Nörrenberg.

(Erste Fortsetzung)

Zerlegung der Kräfte nach drei beliebigen Richtungen, und allgemeinere Ausdrücke für die Bedingungen des Gleichgewichts.

31. Damit drei in dem Angriffspuncte der Kraft P angebrachte Kräfte Q, Q′, Q″, deren Richtungen mit den drei Geraden

$$x = az + \cdot\cdot \qquad x = a'z + \cdot\cdot \qquad x = a''z + \cdot\cdot$$
$$y = bz + \cdot\cdot \qquad y = b'z + \cdot\cdot \qquad y = b''z + \cdot\cdot$$

parallel sind, die Composanten von P seyn können, muss offenbar, wenn diese vier Kräfte parallel mit den Achsen x, y, z zerlegt werden, für jede dieser Achsen die Summe der Composanten von Q, Q′, Q″, der Composante von P gleich seyn. Da nun, wenn man

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)} = R$$
$$\sqrt{(a'^2 + b'^2 + 1)} = R'$$
$$\sqrt{(a''^2 + b''^2 + 1)} = R''$$

setzt,

$$\frac{a}{R}, \quad \frac{b}{R}, \quad \frac{1}{R};$$

$$\frac{a'}{R'}, \quad \frac{b'}{R'}, \quad \frac{1}{R'},$$

$$\frac{a''}{R''}, \quad \frac{b''}{R''}, \quad \frac{1}{R''}$$

die Cosinus der Winkel sind, welche die drei Geraden mit den Achsen der x, y, z machen, so hat man nach No. 28 u. 29 I. B. St. 4 für die Bestimmung der Kräfte Q, Q′, Q″, folgende drei Gleichungen:

$$Q.\frac{a}{R} + Q'\frac{a'}{R'} + Q''\frac{a''}{R''} = P\cos\alpha,$$

$$Q.\frac{b}{R} + Q'.\frac{b'}{R'} + Q''.\frac{b''}{R''} = P\cos\beta,$$

$$Q.\frac{1}{R} + Q'.\frac{1}{R'} + Q''.\frac{1}{R''} = P\cos\gamma.$$

Man erhält hieraus, wenn man

$$a(b' - b'') - b(a' - a'') + a'b'' - a''b' = S$$

setzt,

$$Q = \frac{P}{S}.\ R[\cos\alpha\ (b' - b'') - \cos\beta\ (a' - a'') + \cos\gamma\ (a'b'' - a''b')]$$

$$Q' = \frac{P}{S}.\ R'[\cos\alpha\ (b'' - b) - \cos\beta\ (a'' - a) + \cos\gamma\ (a''b - ab'')]$$

$$Q'' = \frac{P}{S}.\ R''[\cos\alpha\ (b - b') - \cos\beta\ (a - a') + \cos\gamma\ (ab' - a'b)]$$

Wenn $S = o$ wird, so reduciren sich diese Ausdrücke entweder auf $\frac{1}{o}$, oder auf $\frac{o}{o}$; im ersten Falle ist die verlangte Zerlegung unmöglich, und im zweiten unbestimmt.

32. Es sey

$$Ax + By + Cz + D = o$$

die Gleichung einer Ebene, so sind (Littrow S. 44)

$$Aa + Bb + C = o,$$
$$Aa' + Bb' + C = o,$$
$$Aa'' + Bb'' + C = o,$$

die Bedingungsgleichungen, dass die drei Geraden Nro. 31 mit dieser Ebene parallel sind. Eliminirt man A, B, C, so erhält man

$$(a - a')(b' - b'') - (a' - a'')(b - b') = o$$

oder reducirt,

$$a(b' - b'') - b(a' - a'') + a'b'' - a''b' = S = o$$

als Bedingungsgleichung, dass die drei Geraden mit irgend einer Ebene parallel sind.

33. Vergleicht man die in den Werthen von Q, Q′, Q″ mit

$$\frac{P}{S}.R, \quad \frac{P}{S}.R'', \quad \frac{P}{S}.R''$$

multiplicirten Ausdrücke mit der eben gefundenen Gleichung, und erinnert sich aus No. 22, dass

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

die Richtung der Kraft P eben so bestimmen, wie a, b, a′, b′, a″, b″ die Richtungen der drei Geraden, so sieht man leicht, dass das Nullwerden dieser Ausdrücke die Bedingung ist, dass die Richtung der Kraft P und je zwei der drei Geraden mit irgend einer Ebene parallel sind.

Die Zerlegung einer Kraft P, parallel mit drei Geraden, ist also unbestimmt, wenn diese Geraden und die Richtung von P mit irgend einer Ebene parallel sind; unmöglich, wenn es nur die drei Geraden sind.

34. Zerlegt man sämmtliche an einem unveränderlichen Systeme angebrachten Kräfte P′, P″,..

parallel mit den drei Geraden No. 31, und bezeichnet die Summen der parallelen Composanten mit Q, Q′, Q″, so hat man nach No. 31.

$$Q = \frac{R}{S} [(P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + ..)(b' - b'')$$
$$- (P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + ..)(a' - a'')$$
$$+ (P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + ..)(a'b'' - a''b')]$$

oder nach der in No. 25 eingeführten Bezeichnung

$$Q = \frac{R}{S} [X(b' - b'') - Y(a' - a'') + Z(a'b'' - a''b')]$$

$$Q' = \frac{R'}{S} [X(b'' - b) - Y(a'' - a) + Z(a''b - ab'')]$$

$$Q'' = \frac{R''}{S} [X(b - b') - Y(a - a') + Z(ab' - a'b)]$$

und folglich, wenn für jede der Geraden die Summe der Composanten null ist;

$$X(b' - b'') - Y(a' - a'') + Z(a'b'' - a''b') = o,$$
$$X(b'' - b) - Y(a'' - a) + Z(a''b - ab'') = o,$$
$$X(b - b') - Y(a - a') + Z(ab' - a'b) = o,$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man

$$Z[a(b' - b'') - b(a' - a'') + a'b'' - a''b'] = o$$

woraus vermöge No. 32, weil die drei Geraden nicht mit irgend einer Ebene parallel seyn dürfen, $Z = o$ folgt.

Durch diesen Werth von z reduciren sich die drei vorletzten Gleichungen auf folgende zwei:

$$X(b' - b'') - Y(a' - a'') = o,$$
$$Y(b - b') - Y(a - a') = o;$$

aus welchen sich

$$X[(a - a')(b' - b'') - (a' - a'')(b - b')] = o;$$
$$Y[(a - a')(b' - b'') - (a' - a'')(b - b')] = o.$$

ableiten lässt. Da nun nach No. 32, vermöge der Voraussetzung, dass die drei Geraden nicht mit irgend einer Ebene parallel seyn sollen, die Coefficienten von X und Y nicht null sind, so hat man $X = o$ und $Y = o$.

Die drei ersten der sechs Gleichungen in No. 24 sind also befriedigt, wenn die Summe der Composanten, parallel mit drei Geraden, die nicht mit irgend einer Ebene parallel sind, für jede dieser Geraden null ist.

35. Wenn die Summe der statischen Momente für drei, durch den Ursprung der Coordinaten gehende Achsen

$$x = az, \quad x = a'z, \quad x = a''z,$$
$$y = bz, \quad y = b'z; \quad y = b''z$$

null ist, so hat man nach No. 26, und der in No. 31 gebrauchten Bezeichnungsart,

$$L.\frac{a}{R} + M.\frac{b}{R} + N.\frac{1}{R} = o:$$

$$L.\frac{a'}{R'} + M.\frac{b'}{R'} + N.\frac{1}{R'} = o;$$

$$L.\frac{a''}{R''} + M.\frac{b''}{R''} + N.\frac{1}{R''} = o;$$

woraus

$$L\,[(a - a')(b' - b'') - (a' - a'')(b - b')] = o;$$
$$M\,[(a - a')(b' - b'') - (a' - a'')(b - b')] = o$$

folgt. Da nun, wenn die drei Achsen nicht in einer Ebene liegen, nach No. 32 die Coefficienten von L und M nicht null sind, so hat man $L = o$, $M = o$, und folglich, vermöge der vorhergehenden Gleichungen auch $N = o$.

Die drei letzten der sechs Gleichungen in No.

24 sind also befriedigt, wenn die Summe der statischen Momente für jede von drei Achsen null ist, welche durch den Ursprung der Coordinaten gehen und nicht in einer Ebene liegen.

36. Da aber die Gleichung, A. No. 25, unabhängig von l, m, n wird, wenn man $X = o$, $Y = o$, $Z = o$ hat, so ist klar, dass in diesem Falle die Summe der statischen Momente für alle parallele Achsen gleich ist, und dass sich also die Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien unveränderlichen Systems auch auf folgende Art ausdrücken lassen:

Ein freies unveränderliches System ist im Gleichgewichte, wenn erstens, die Summe der Composanten, parallel mit drei Geraden, die nicht mit irgend einer Ebene parallel sind, für jede dieser Geraden, und zweitens, die Summe der statischen Momente für jede von drei Achsen, die ebenfalls nicht mit irgend einer Ebene parallel seyn dürfen, null ist.

37. Wenn die Gleichung A, No. 25, auf folgende Art geordnet wird:

$$\begin{aligned} &(L - Yn + Zm) \cos \lambda \\ + &(M - Zl + Xn) \cos \mu \\ + &(N - Xm + Yl) \cos \nu = o, \end{aligned}$$

so ist klar, dass dieselbe nur dann für jede durch den Punct l, m, n gehende Achse befriedigt ist, wenn man

$$\begin{aligned} L - Yn + Zm &= o \\ M - Zl + Xn &= o \\ N - Xm + Yl &= o \end{aligned}$$

hat. Diese drei Gleichungen drücken also die Bedingungen aus, welche erfüllt werden müssen, wenn das System mit Hülfe eines unbeweglichen Punctes,

l, m, n, mit dem es fest verbunden ist, im Gleichgewichte seyn soll.

38. Ist das System um jeden der drei Puncte l, m, n; l′, m′, n′; l″, m″, n″ im Gleichgewichte, so hat man ausser den drei letzten Gleichungen noch folgende:

$$L - Yn' + Zm' = o;$$
$$M - Zl' + Xn' = o;$$
$$N - Xm' + Yl' = o:$$

$$L - Yn'' + Zm'' = o;$$
$$M - Zl'' + Xn'' = o;$$
$$N - Xm'' + Yl'' = o;$$

Aus diesen Gleichungen erhält man zunächst

$$X\,(n - n') - Z\,(l - l') = o;$$
$$X\,(n' - n'') - Z\,(l' - l'') = o;$$

$$Y\,(n - n') - Z\,(m - m') = o;$$
$$Y\,(n' - n'') - Z\,(m' - m'') = o;$$

und hieraus

$$X\,[(l - l')\,(n' - n'') - (l' - l'')\,(n - n')] = o;$$
$$Z\,[(l - l')\,(n' - n'') - (l' - l'')\,(n - n')] = o;$$
$$Y\,[(m - m')\,(n' - n'') - (m' - m'')\,(n - n')] = o;$$
$$Z\,[(m - m')\,(n' - n'') - (m' - m'')\,(n - n')] = o;$$

39. Da nun die Gleichungen der Geraden, welche durch die zwei Puncte l′, m′, n′; l″, m″, n″ geht,

$$(x - l')\,(n' - n'') - (l' - l'')\,(z - n') = o,$$
$$(y - m')\,(n' - n'') - (m' - m'')\,(z - n') = o.$$

sind, (Littrow S. 31), woraus, wenn auch noch der Punct l, m, n in dieser Geraden liegen soll,

$$(l - l')\,(n' - n'') - (l' - l'')\,(n - n') = o,$$
$$(m - m')\,(n' - n'') - (m' - m'')\,(n - n') = o,$$

folgt, so hat man für den Fall, dass die drei Puncte nicht in einer Geraden liegen,

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o,$$

und folglich auch vermöge der vorhergehenden Gleichungen,

$$L = o, \quad M = o, \quad N = o.$$

Wenn also ein unveränderliches System um jeden von drei Puncten, die nicht in einer Geraden liegen, im Gleichgewichte ist, so ist es auch noch im Gleichgewichte, wenn es frei wird.

40. Zu diesem Satze gelangt man übrigens auch durch folgende ganz einfache Betrachtung.

Wenn ein System mit Hülfe eines unbeweglichen Punctes im Gleichgewichte ist, so muss die Richtung der Resultante sämmtlicher Kräfte durch diesen Punct gehen. Alsdann ist aber auch das System um einen beliebigen zweiten Punct, der in dieser Richtung liegt, im Gleichgewichte. Da nun diese Resultante um jeden dritten Punct, der sich nicht in ihrer Richtung befindet, eine Drehung hervorbringen müsste, wenn die beiden ersten Puncte frei würden; so ist klar, dass wenn der Voraussetzung gemäss, diese Drehung nicht erfolgen soll, die Resultante null seyn muss.

Bestimmung der zum Gleichgewichte eines freien unveränderlichen Systems erforderlichen Kräfte, wenn dasselbe nicht im Gleichgewichte ist.

41. Wenn die an einem, nicht im Gleichgewichte befindlichen Systeme angebrachten Kräfte P', P'', . . mit ihren Richtungen und Angriffspuncten gegeben sind, so hat man für die Bestimmung der Grösse, der

Richtung und des Angriffspunctes einer noch zu dem Gleichgewichte des Systems erforderlichen Kraft P folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\alpha + X = 0; \\ P\cos\beta + Y = 0; \\ P\cos\gamma + Z = 0; \\ P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + L = 0; \\ P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + M = 0; \\ P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + N = 0. \end{array}\right\} \quad (C)$$

Aus den drei ersten folgt

$$P\cos\alpha = -X$$

$$P\cos\beta = -Y$$

$$P\cos\gamma = -Z$$

und hieraus

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \quad (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -\dfrac{X}{P} \\ \cos\beta = -\dfrac{Y}{P} \\ \cos\gamma = -\dfrac{Z}{P} \end{array}\right\} \quad (E)$$

42. Setzt man diese Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die drei letzten von den sechs Gleichungen (C), so erhält man für die Bestimmung der Coordinaten des Angriffspunctes x, y, z, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} L - Yz + Zy = 0; \\ M - Zx + Xz = 0; \\ N - Xy + Yz = 0. \end{array}\right\} \quad (F)$$

43. Wenn man diese Gleichungen der Ordnung nach mit X, Y, Z multiplicirt, so erhält man

$$LX - XYz + XZy = o;$$
$$MY - YZx + XYz = o;$$
$$NZ - XZy + XZx = o,$$

und hieraus durch Addition,

$$LX + MY + NZ = o, \qquad (G)$$

eine Bedingungsgleichung, welcher die gegebenen Grössen L, X, M, . . genügen müssen, wenn die Gleichungen (C) zugleich Statt finden sollen.

Wenn also diese Bedingungsgleichung nicht befriedigt ist, so kann auch das gegebene System nicht durch eine einzige Kraft ins Gleichgewicht gesetzt werden.

44. Beispiel. Wenn an einem Systeme nur zwei Kräfte P', P'' angebracht sind, so kann man den Angriffspunct von P'' zum Ursprunge der Coordinaten, die Richtung von P'' zur Achse der x, und die durch den Angriffspunct von P' und die Richtung von P'' gehende Ebene zur Ebene der xy annehmen.

Dadurch wird

$$x'' = o,\ y'' = o,\ z'' = o;$$

$$\alpha'' = o,\ \beta'' = \frac{\pi}{2},\ \gamma'' = \frac{\pi}{2};$$

$$z' = o;$$

und man hat

$$X = P'\cos\alpha' + P'';$$
$$Y = P'\cos\beta'$$
$$Z = P'\cos\gamma';$$
$$L = P'\,(-\,y'\cos\gamma');$$
$$M = P'\,x'\,\cos\gamma';$$
$$N = P'\,(y'\,\cos\alpha' - x'\,\cos\beta');$$

woraus

$$LX + MY + NZ = -\,P'\,P''\,y'\cos\gamma'$$

folgt. Die Bedingungsgleichung (G) ist also hier nur dann befriedigt, wenn entweder $y' = o$, oder $\cos \gamma' = o$ ist; in beiden Fällen liegen aber die Richtungen von P' und P'' in einer Ebene.

Man sieht hieraus, dass zwei Kräfte, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, sich nicht durch eine einzige Kraft ins Gleichgewicht setzen lassen.

45. Es gibt einen Fall, in welchem die Gleichung (G) befriedigt ist und dennoch die sechs Gleichungen (C) nicht zugleich Statt finden können; nähmlich wenn

$$X = o,\ Y = o,\ Z = o,$$

und nicht auch zugleich

$$L = o,\ M = o,\ N = o$$

ist. In diesem Falle lässt sich also das System ebenfalls nicht durch eine einzige Kraft P ins Gleichgewicht setzen.

46. Beispiel. Wenn an einem Systeme zwei gleiche, parallele Kräfte P' P'' nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und man nimmt den Angriffspunct von P' zum Ursprunge der Coordinaten, die Richtung von P' zur Achse der x, und die durch die Richtungen beider Kräfte gehende Ebene zur Ebene der xy, so hat man

$$x' = o,\ y' = o,\ z' = o;$$

$$\alpha' = o,\ \beta' = \frac{\pi}{2},\ \gamma' = \frac{\pi}{2};$$

$$z'' = o;$$

$$\alpha'' = \pi,\ \beta'' = \frac{\pi}{2},\ \gamma'' = \frac{\pi}{2},$$

und folglich

$$X = o,\ Y = o,\ Z = o;$$
$$L = o,\ M = o,\ N = -Z''\,y''.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (C,)

so geben die drei ersten, weil $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nicht zugleich null seyn können, $P = o$, und die sechste reducirt sich hierdurch auf

$$- P'' y'' = o.$$

Da diese Gleichung nur durch $y'' = o$ befriedigt werden kann, in welchem Falle die Richtungen der beiden Kräfte einander gerade entgegengesetzt und also die Kräfte schon von selbst im Gleichgewichte sind, so sieht man, dass zwei parallele, gleiche, nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte, durch keine dritte Kraft ins Gleichgewicht gesetzt werden können.

47. Wenn die Gleichung (G) als befriedigt vorausgesetzt wird, so ist jede der drei Gleichungen (F) eine Folge der beiden andern, und man hat also für die Bestimmung der drei Coordinaten x, y, z des Angriffspunctes von P, nur zwei verschiedene Gleichungen. Da diese Gleichungen eine Gerade bestimmen und folglich durch die Coordinaten eines jeden Punctes derselben befriedigt werden, so kann auch jeder Punct derselben als Angriffspunct gelten.

48. Es seyen a, b, c die Coordinaten eines als Angriffspunct der Kraft P angenommenen Punctes dieser Geraden, so hat man, weil sie den Gleichungen derselben

$$L - Yz + Zy = o,$$
$$M - Zx + Yz = o,$$

genügen müssen,

$$L - Yc + Zb = o,$$
$$M - Za + Xc = o.$$

Eliminirt man zwischen diesen vier Gleichungen die Grössen L und M, so erhält man

$$Z\,(x - a) - X\,(z - c) = o,$$
$$Z\,(y - b) - Y\,(z - c) = o$$

als die Gleichungen der nämlichen Geraden.

Da nun die Gleichungen für die Richtung von P, weil sie durch den Angriffspunct a, b, c geht,

$$(x - a)\cos\gamma - (z - c)\cos\alpha = o,$$
$$(y - b)\cos\gamma - (z - c)\cos\beta = o,$$

oder statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die gefundenen Werthe (E) gesetzt,

$$Z\,(x - a) - X\,(z - c) = o;$$
$$Z\,(y - b) - Y\,(z - c) = o;$$

also einerlei mit den Gleichungen sind, welche so eben für die Gerade gefunden wurden, worin jeder Punct zum Angriffspuncte von P genommen werden kann, so sieht man, dass diese Gerade mit der Richtung von P zusammenfällt.

49. Beispiel. Es seyen zwei Kräfte P′, P″, deren Richtungen in einer Ebene liegen und nicht parallel sind, durch eine Kraft P ins Gleichgewicht zu bringen.

Man nehme die Ebene, worin die Richtungen der Kräfte liegen, zur Ebene der xy; den Angriffspunct von P″ zum Ursprunge der Coordinaten, und die Richtung von P″ zur Achse der x; so hat man

$$x'' = o,\ y'' = o,\ z'' = o;$$
$$\alpha'' = o,\ \beta'' = \frac{\pi}{2},\ \gamma'' = \frac{\pi}{2};$$
$$z' = o,\quad \gamma' = \frac{\pi}{2};$$

folglich

$$X = P'\cos\alpha' + P'';$$
$$Y = P'\cos\beta';$$
$$Z = o;$$
$$L = o;$$
$$M = o;$$
$$N = P'\,(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta').$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (D), (E) und (F), so erhält man

$$P = \sqrt{(P'^2 + P''^2 + 2 P' P'' \cos \alpha')};$$

$$\cos \alpha = -\frac{P' \cos \alpha' + P''}{P};$$

$$\cos \beta = -\frac{P' \cos \beta'}{P};$$

$$\cos \gamma = 0;$$

$$z = 0;$$

$$P' (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') - (P' \cos \alpha' + P'') y + P' \cos \beta' x = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen, welche nach Nr. 47 und 48 als die Gleichungen der Richtung von P angesehen werden können, sieht man, was auch von selbst klar ist, dass diese Richtung in der Ebene der xy, und also mit den Richtungen von P′ und P″ in einer Ebene liegt.

50. Aus der letzten Gleichung erhält man, indem man $y = 0$ setzt, für den Durchschnittspunct der Richtungen von P und P″,

$$x = x' - y' \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'}$$

Da man nun aus der Gleichung

$$(y - y') \cos \alpha' - (x - x') \cos \beta' = 0,$$

welches die eine von den Gleichungen für die Richtung von P, ist, das nämliche für den Durchschnittspunct der Richtungen von P′ und P″ erhält, so sieht man, dass sich die Richtungen der drei Kräfte P, P′, P″ in einem Puncte schneiden.

51. Nimmt man diesen Durchschnittspunct zum gemeinschaftlichen Angriffspuncte, so führt die geometrische Construction der Ausdrücke

$$P = \sqrt{(P'^2 + P''^2 + 2\, P'P'' \cos \alpha')},$$

$$\cos \alpha = -\frac{P' \cos \alpha' + P''}{P},$$

indem man nämlich die Intensitäten der Kräfte durch proportionale Linien ausdrückt, die man vom Angriffspuncte aus auf ihre Richtungen trägt, zu dem so genannten Parallelogramme der Kräfte, worunter man den Satz versteht, dass die Resultante zweier Kräfte, so wohl der Grösse als der Richtung nach, durch die Diagonale des durch die Grösse und Richtung der Composanten bestimmten Parallelogramms vorgestellt wird.

52. Wenn zwei Kräfte P, P_1 nöthig sind, das gegebene System ins Gleichgewicht zu bringen, so hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + X = 0;\\
&P \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + Y = 0;\\
&P \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + Z = 0;\\
&P(z \cos \beta - y \cos \gamma) + P_1 (z_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \gamma_1) + L = 0,\\
&P(x \cos \gamma - z \cos \alpha) + P_1 (x_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \alpha_1) + M = 0,\\
&P(y \cos \alpha - x \cos \beta) + P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1) + N = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{(H)}$$

für das Gleichgewicht, und als Bedingungsgleichung, dass diese Statt finden können,

$$\begin{aligned}
&[L + P_1 (z_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \gamma_1)]\ (X + P_1 \cos \alpha_1)\\
&+ [M + P_1 (x_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \alpha_1)]\ (Y + P_1 \cos \beta_1)\\
&+ [N + P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1)]\ (Z + P_1 \cos \gamma_1) = 0,
\end{aligned}$$

oder entwickelt und reducirt,

$$\left.\begin{aligned}
&LX + MY + NZ\\
&+ P_1 [L \cos \alpha_1 + X (z_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \gamma_1)\\
&\quad + M \cos \beta_1 + Y (x_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \alpha_1)\\
&\quad + N \cos \gamma_1 + Z (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1)] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

53. Wenn nun P_1, α_1, β_1, x_1, y_1, z_1 so ange-

nommen werden, dass diese Gleichung befriedigt wird, welches für jeden besondern Fall auf mannigfaltige Art geschehen kann, so erhält man aus den Gleichungen (H) folgende Gleichungen für die Bestimmung von P, α, β, γ, x, y, z.

$$P = \sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2 + P_1^2 + 2P_1(X\cos\alpha_1 + Y\cos\beta_1 + Z\cos\gamma_1)]}; \quad (K)$$

$$\cos\alpha = -\frac{X + P_1 \cos\alpha_1}{P};$$

$$\cos\beta = -\frac{Y + P_1 \cos\beta_1}{P};$$

$$\cos\gamma = -\frac{Z + P_1 \cos\gamma_1}{P};$$

$$L + P_1(z_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\gamma_1) - (Y + P_1\cos\beta_1)z + (Z + P_1\cos\gamma_1)y = 0;$$

$$M + P_1(x_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\alpha_1) - (Z + P_1\cos\gamma_1)x + (X + P_1\cos\alpha_1)z = 0; \quad (M)$$

$$N + P_1(y_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\beta_1) - (X + P_1\cos\alpha_1)y + (Y + P_1\cos\beta_1)x = 0.$$

54. **Beispiel.** Es sey ein gegebenes System, für welches weder $LX + MZ + NZ = 0$, noch $N = 0$ ist, durch zwei Kräfte P und P_1 ins Gleichgewicht zu setzen, mit der Bedingung, dass P_1 im Ursprunge der Coordinaten nach der Richtung der Achse der z angebracht werden soll, so hat man

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_1 = 0;$$

und die Gleichungen (I), (K), (L), (M) geben

$$P_1 = -\frac{1}{N}(LX + MY + NZ);$$

$$P = \sqrt{[X^2 + Y^2 + (Z + P_1)^2]};$$

$$\cos\alpha = -\frac{X}{P};$$

$$\cos\beta = -\frac{Y}{P};$$

$$\cos\gamma = -\frac{Z + P_1}{P};$$

$$L - Yz + (Z + P_1)\ y = o;$$
$$M + Xz - (Z + P_1)\ x = o;$$
$$N - Xy + Yx = o.$$

II. Neue Ansicht des unendlich Kleinen und Anwendung derselben in der Theorie der Berührung der Linien und Flächen, von Cauchy.

(Aus den Exercices de Mathématiques, pp. 145, 177 frei übertragen).

A. Von den verschiedenen Ordnungen der unendlich kleinen *) Grössen.

1.

Bei einigen Untersuchungen, welche mit der Infinitesimalrechnung in Verbindung stehen, namentlich

---

*) Keine Grösse ist unendlich klein, in der mathematischen Bedeutung des Wortes, denn eine Grösse mag noch so klein seyn, so lässt sich immer eine noch kleinere denken. Auch die Nulle ist nicht als eine unendlich kleine Grösse zu betrachten, da ihr durchaus keine Grösse zukommt. Eine fortwährend abnehmende Grösse wird nur unendlich klein, wenn sie bei ihrem Abnehmen Werthe anzunehmen vermag, oder nach und nach wirklich annimmt, welche kleiner sind, als jede beliebige

in der Lehre von der Berührung der Linien und Flächen, ist es nützlich, nicht bloss, wie es gewöhnlich geschieht, unendlich kleine Grössen der ersten, zweiten, dritten Ordnung u. s. w., sondern auch solche zu betrachten, deren Ordnungszahlen gebrochen oder gar irrational sind. Obgleich es bei dem ersten Anblicke schwierig scheinen dürfte, sich einen deutlichen Begriff von derlei unendlich kleinen Grössen zu verschaffen; so geht diess doch sehr leicht an, wenn man die Sache, wie es im Folgenden geschehen wird, aus einem allgemeinen Standpuncte in das Auge fasst.

2.

Es sey i eine unendlich kleine, der Bildung anderer zum Grunde liegende Grösse; f(i) eine der Grössen aus dem Systeme dessen Basis i ist: so soll f(i) ein unendlich Kleines der Ordnung a heissen, wenn der Quotient

$$\frac{f(i)}{i^r}$$

so beschaffen ist, dass er für alle Werthe von r, welche kleiner als a sind, verschwindet, und für alle Werthe von r, welche a übertreffen, unendlich gross ausfällt *).

---

noch so kleine Grösse. Die Nulle ist demnach die Grenze der unendlichen klein werdenden Grössen, welcher dieselben so nahe kommen können, als man will. Wenn daher die Analysten gerade zu „von unendlich kleinen Grössen" sprechen, so ist diess nur ein abgekürzter Ausdruck.

*) Oder vielmehr, wenn der genannte Quotient bei dem unendlichen Abnehmen von i für $r < a$ unendlich klein wird, und für $r > a$ unendlich wächst.

3.

Hieraus folgt sogleich, dass in der geometrischen Progression

$$f(i),\ \frac{f(i)}{i},\ \frac{f(i)}{i^2},\ \frac{f(i)}{i^3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

das Glied, in welchem der Exponent von i der Zahl a, oder wenn a keinen ganzen Werth besitzt, der grösseren der beiden unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen, zwischen denen a liegt, gleichkommt, das erste ist, welches bei dem unendlichen Abnehmen von i nicht verschwindet; woraus sich denn, wenn man f(i) nach den Potenzen von i entwickelt, weiter ergibt, dass in der Reihe

$$f(i),\ \frac{d\,f(i)}{di},\ \frac{d^2\,f(i)}{di^2},\ \frac{d^3\,f(i)}{di^3},\ \ldots\ldots$$

der dem so eben genannten Gliede der Stelle nach correspondirende Differenzial-Quotient der erste ist, welcher für ein unendlich kleines i nicht ebenfalls unendlich klein wird.

4.

Was den Quotienten $\frac{f(i)}{i^a}$ selbst betrifft, so kann er bei den obigen Voraussetzungen, bald einer von der Nulle verschiedenen endlichen Grenze sich nähern, bald unendlich klein werden, und bald wieder unendlich wachsen. So sind z. B.

$$i^a e^i,\quad \frac{i^a e^i}{li},\quad i^a e^i\, li$$

drei unendlich kleine Grössen von der Ordnung a;

den Quotienten, welche dieselben nach verrichteter Division durch a^n darbieten, nämlich

$$e^i, \quad \frac{e^i}{li}, \quad e^i li,$$

entsprechen die Grenzen

$$1, \quad 0 \quad \frac{1}{0}$$

5.

Es seyen nun f(i), F(i) zwei auf die Basis i sich beziehende unendlich kleine Grössen von den Ordnungen a, b; ferner sey a < b, so wird, wenn r zwischen a und b fällt. $\frac{f(i)}{i^r}$ bei dem unendlichen Abnehmen von i unendlich klein und $\frac{F(i)}{i^r}$ unendlich gross, woraus erhellet, dass der Quotient

$$\frac{F(i)}{f(i)}$$

die Nulle zur Grenze hat. Diess kann aber nicht Statt finden, wenn nicht bei den kleinsten Werthen von i, f(i), stets die Grösse F(i) übertrifft.

Von zwei auf dieselbe Grundgrösse sich beziehenden unendlich abnehmenden Grössen verschiedener Ordnungen erhält also diejenige, welcher die höhere Ordnungszahl zukommt, zuletzt fortwährend die kleineren Werthe.

6.

Unter denselben Voraussetzungen wird offenbar die Summe

$$\frac{f(i)}{i^r} + \frac{F(i)}{i^r} = \frac{f(i) + F(i)}{i^r}$$

unendlich klein, oder unendlich gross; je nachdem $r < a$ oder $r > a$ ist, und daher ist $f(i) + F(i)$ ein unendlich Kleines der Ordnung a. Dasselbe kann von der Summe gesagt werden, welche sich ergibt, wenn man zu $f(i)$ mehrere unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen addirt.

Der Ordnungsexponent der Summe mehrerer zu demselben Systeme gehörender unendlich kleinen Grössen kommt daher immer dem kleinsten Ordnungsexponenten dieser Grössen gleich.

7.

Sind ferner $f(i)$, $F(i)$, wie oben, unendlich kleine Grössen von den Ordnungen a, b, so werden die Quotienten

$$\frac{f(i)}{i^r}, \quad \frac{F(i)}{i^s}$$

unendlich klein oder unendlich gross, je nachdem man

$r < a$ und $s < b$ oder $r > a$ und $s > b$

annimmt; ein Gleiches gilt daher auch von dem Producte dieser Quotienten, nämlich von

$$\frac{f(i) \, . \, F(i)}{i^{r+s}}$$

für $r + s < a + b$ und $r + s > a + b$. Es ist also $f(i) \, . \, F(i)$ ein unendlich Kleines von der Ordnung $a + b$ und somit besteht folgender Satz:

Der Ordnungsexponent des Productes zweier unendlich kleiner Grössen desselben Systems ist der Summe der Ordnungszahlen der Factoren gleich.

Man wird denselben ohne Mühe auch auf ein Product mehrerer unendlich kleiner Grössen ausdehnen.

8.

Es sey $f(i) = I$ im Systeme dessen Basis i ist eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung a; aus ihr entspringe eine andere unendlich kleine Grösse $F(I)$, welcher in dem auf die Basis I gegründeten Systeme die Ordnungszahl b zukomme, so werden die Quotienten

$$\frac{f(i)}{i^r}, \quad \frac{F(I)}{I^s}$$

gleich Null oder unendlich gross, je nachdem $r \lessdot a$, $s \lessdot b$ oder $r \gtrdot a$, $s \gtrdot b$ ist. Dasselbe findet daher bei dem Producte

$$\left(\frac{f(i)}{i^r}\right)^s \quad \frac{F(I)}{I^s} = \frac{F(I)}{i^{rs}} = \frac{F(f(i))}{i^{rs}}$$

in Bezug auf die Annahme $rs \lessdot ab$ und $rs \gtrdot ab$ Statt, und desshalb ist $F(f(i))$ hinsichtlich der Basis i ein unendlich Kleines von der Ordnung ab.

Wird daher aus einer unendlich kleinen Grösse als Basis eine andere unendlich kleine Grösse gebildet, so muss man die Ordnungszahl der letzteren mit jener der ersteren multipliciren, um die Ordnung zu erhalten, welche der letzteren Grösse in dem Systeme, zu welchem die erstere gehört, zukommt.

9.

Aus diesem Satze erhellet

Erstens: dass das Verhältniss der Ordnungszah-

len zweier zu demselben Systeme gehörender unendlich kleinen Grössen durch Uebertragung dieser Grössen in ein anderes System keine Aenderung erleidet.

Zweitens: dass der Quotient, welchen die Ordnungszahl einer unendlich kleinen Grösse durch jene einer zweiten getheilt darbietet, die Ordnung ausdrückt, welche die erste Grösse in dem auf die zweite als Basis gegründeten System einnimmt.

Drittens: dass, wenn f(i) in Bezug auf die Basis i ein unendlich Kleines von der Ordnung a ist, umgekehrt i in Bezug auf die Basis f(i) als ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{a}$ betrachtet werden muss.

Viertens: dass die Ordnungszahl einer unendlich kleinen Grösse nicht geändert wird, wenn man ihre Basis gegen eine in dem auf diese Basis sich beziehenden Systeme enthaltene unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung vertauscht.

B. Ueber die verschiedenen Ordnungen der Berührung der Linien und der Flächen.

10.

Die Theorie der Berührung der Linien und der Flächen hat durch Lagrange eine neue Grundlage erhalten. Er zeigte, dass zwischen zwei in einem Puncte (P) sich begegnenden ebenen Curven, deren auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y sich beziehende Gleichungen für das dem Puncte (P) gehörende x nicht nur allein dasselbe y, sondern auch überdiess einerlei $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$

geben, durch diesen Punct (P) keine dritte Curve geführt werden kann, wofern nicht alle genannten Grössen auch mittelst der Gleichungen dieser letzteren Curve hinsichtlich des Punctes (P) beziehungsweise die nämlichen Werthe erhalten. Wird die so eben ausgesprochene Bedingung nicht erfüllt, so liegen sich die zwei ersten Curven in der Gegend des Punctes (P) näher, als ihnen die dritte kommt. Durch diese Betrachtungen sucht Lagrange den Begriff eines grösseren oder geringeren Grades der Berührung zweier Curven festzusetzen, worunter man sich, der gewöhnlichen Ansicht der Differenzialrechnung zufolge, ein Zusammenfallen mehrerer oder wenigerer Elemente die Curven vorstellt, obschon streng genommen, jede zwei an irgend eine Stelle wie immer in Berührung stehende Curven sich dort nur in einen einzigen Puncte begegnen. In der Theorie dieses Analysten wird die Ordnung die Berührung zweier ebenen Curven durch die Anzahl der unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots$$

bestimmt, welche für beide Curven in Bezug auf den Berührungspunct übereinstimmende Werthe annehmen. Lagrange dehnt seine Theorie auch auf Curven von doppelter Krümmung und auf krumme Flächen aus. Er misst den Grad der Berührung zweier Curven im Raume, deren jede durch zwei Gleichungen zwischen drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z vorgestellt wird, durch die Anzahl der aufeinander folgenden Glieder der Reihen

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \ldots\ldots$$

welche in Bezug auf den Berührungspunct ihre Werthe nicht ändern, wenn man eine dieser Curven an die Stelle der anderen treten lässt, und behauptet, dass es nicht möglich sey, zwischen zwei in einer Berührung der nten Ordnung stehenden Curven an der ihnen gemeinschaftlichen Stelle eine dritte Curve zu verzeichnen, welcher hinsichtlich der beiden andern ein niedrigerer Grad der Berührung zukommt. Eben so richtet sich die Ordnung der Berührung zweier Flächen nach der Ordnung der in den letzten Gliedern der Reihe

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}; \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}; \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^3dy}, \frac{d^3z}{dxdy^2}, \frac{d^3z}{d^3y},$$

etc. erscheinenden Differenzialien von z, vorausgesetzt, dass man diese Reihe sogleich abbricht, wenn man auf eine Folge gleichnamiger Differenzialquotienten stösst, deren auf den Berührungspunct bezogene Werthe nicht sämmtlich dieselben bleiben, indem man eine der genannten Flächen der anderen substituirt, und auch hier wird als characteristisches Merkmal der Berührung der nten Ordnung zweier Flächen die Unmöglichkeit aufgestellt, zwischen dieselben durch den Berührungspunct eine dritte Fläche zu legen, welche mit den ersteren nicht in einer Berührung der nten oder einer höheren Ordnung steht.

11.

Obschon die Theorie, welche wir so eben erwähnt

haben, den Vortheil besitzt, im Allgemeinen eine deutliche Vorstellung von den verschiedenen Graden der Berührung zweier ebenen Curven zu geben, so dürfte sie doch, was Strenge und Präcision betrifft, Einiges zu wünschen übrig lassen. Erstlich gründet sie die Erklärung der Ordnung der Berührung zweier Linien oder zweier Flächen auf die Beschaffenheit von Grössen, die dem Einflusse des gewählten Coordinatensystems unterliegen, während doch diese Ordnung einzig und allein durch die Natur beider Curven oder Flächen selbst bedingt wird. In der That wird die grössere oder geringere Annäherung zweier sich berührenden Curven in diesem Systeme mit Hülfe der Länge der Verbindungslinie zweier von dem Berührungspuncte nicht stets gleichweit entfernter, sondern mit der Lage der Achsen der Coordinaten zugleich ihre Stellen wechselnder Puncte beurtheilt. Ferner möchte es wohl schwer seyn, zu sagen, was man sich, wenn von einander berührenden Linien doppelter Krümmung die Rede ist, unter einer Curve, welche zwischen denselben liegt, oder nicht liegt, denken soll. Eine ähnliche Schwierigkeit findet bei krummen Flächen Statt. Um dieselbe deutlich einzusehen, betrachte man die zwei Flächen deren Gleichungen

$$z = -x^4 - y^4 \text{ und } z = x^4 + y^4$$

sind. Diese Flächen berühren sich im Anfangspuncte der Coordinaten und zwar gehört ihre Berührung daselbst zur dritten Ordnung; die durch die Gleichung

$$z = x^2$$

vorgestellte cylindrische Fläche steht mit ihnen bloss in einer Berührung der ersten Ordnung. Daher sollte, den oben angeführten Lehren gemäss, die letztere Flä-

che zwischen den ersteren nicht hindurch gehen. Allein diess geschieht dennoch wenigstens in der Nähe der Achse der y und namentlich bei den auf dieser Achse selbst befindlichen Puncten der cylindrischen Fläche. Diese Puncte liegen nämlich zwischen den zwei Curven, in welchen die ersteren Flächen von der Ebene yz geschnitten werden, und denen die Gleichungen

$$z = -y^4, \quad z = y^4$$

entsprechen. Endlich lässt sich die Ordnung der Berührung zweier Curven oder Flächen auf dem oben angedeuteten Wege nicht ausmitteln, wenn der Winkel, welchen die gemeinschaftliche Tangente der Curven mit der Achse der x, oder die gemeinschaftliche Berührungsebene der Flächen mit der Ebene xy bildet, ein Rechter ist. Es seyen z. B. die drei durch die Gleichungen

$$x = y^2, \quad x = y^4, \quad x = y^6$$

vorgestellten Curven mit einander zu vergleichen. Sie berühren sich wechselseitig und haben die Achse der y zur gemeinschaftlichen Tangente; die Werthe der Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... aber werden für x = o sämmtlich unendlich gross. Indessen ist die Berührung der ersten Curve mit jeder der anderen bloss von der ersten, und die der zwei letzten bloss von der dritten Ordnung.

12.

Alle diese Schwierigkeiten werden beseitiget, wenn man die Lehre von der Berührung der Linien und Flächen auf folgende Art behandelt.

Die Tangente einer Curve kann füglich als die

Grenze erklärt werden, welcher sich eine diese Curve in zwei Puncten schneidende Gerade unendlich nähert, wenn die Entfernung des einen der Durchschnittspuncte von dem andern, als fix betrachteten, unendlich abnimmt. Auch ist es leicht zu zeigen, dass im Allgemeinen alle Tangenten, welche durch einen bestimmten Punct einer krummen Fläche zu verschiedenen, auf dieser Fläche verzeichneten und diesen Punct in sich enthaltenden Curven gezogen werden können, in einer und derselben Ebene sich befinden, *) welche die diesem Puncte zugehö-

---

*) Es seyen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines gegebenen Punctes einer Curve, durch welchen zu einem zweiten Puncte derselben, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ heissen mögen, eine Secante gehe; so bestehen, wenn wir die Coordinaten jedes beliebigen Punctes dieser Secante durch x', y', z', vorstellen, für dieselbe die Gleichungen

$$x' - x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(z' - z), \quad y' - y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(z' - z)$$

Den Gleichungen der Curve gemäss sind x und y Functionen von z; lassen wir nun Δz unendlich klein werden, oder in den Zustand des Differenzials dz übergehen, so haben wir, wenn wir statt der veränderlichen Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ihre Grenzwerthe setzen, die Gleichungen der dem Puncte x, y, z der Curve entsprechenden Tangente, nämlich

$$x' - x = \frac{dz}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z).$$

Auf einer Fläche, deren Differenzialgleichung

$$dz = pdx + q\,dy$$

sey, wobei p, q Functionen von x, y, z anzeigen, werde nun durch den Puncte x, y, z eine Curve beschrieben und zu dieser durch denselben Punct eine Tangente gezogen. Man kann die Curve als den Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einer andern, welcher die Differenzialgleichung

$$dz = Pdx + Qdy$$

rige Berührungsebene der Fläche darstellt. Endlich kann man als Merkmal der Berührung zweier Curven oder krummen Flächen in einem festgesetzten Puncte den Umstand angeben, dass sie in diesem Puncte dieselbe Tangente oder Berührungsebene besitzen.

13.

Nehmen wir nun an, aus dem Berührungspuncte (P) zweier wie immer beschaffenen Curven werde mit einem unendlich kleinen Halbmesser i eine Kugel beschrieben, welche diesen Curven in zwei einander unendlich nahen Puncten (Q), (R) begegnet, so kann die grössere oder geringere Annäherung der Curven in der Gegend des Berührungspunctes offenbar durch die unendlich kleine Sehne QR, welche die letzteren

---

gehöre, betrachten. Beide Gleichungen mit einander verbunden geben

$$\frac{dx}{dz} = \frac{Q - q}{pQ - qP}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{p - P}{pQ - qP},$$

folglich sind die Gleichungen der oben erwähnten Tangente

$$x' - x = \frac{Q - q}{pQ - qP}(z' - z)$$

$$y' - y = \frac{p - P}{pQ - qP}(z' - z)$$

Multiplicirt man die erste derselben mit p und die zweite mit q, so gibt die Addition der Producte

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Da diese letztere Gleichung von den Grössen P, Q, durch welche die Beschaffenheit der auf der gegebenen Fläche verzeichneten Curve bestimmt wird, frei ist, so ist sie auf alle durch den Punct x, y, z gehenden Curven anwendbar, und gibt somit die Fläche an, in welcher alle diesem Puncte zugehörigen Tangenten dieser Curven liegen. Allein sie enthält x′, y′, z′ bloss in der ersten Potenz, daher gehört sie einer Ebene.

Puncte mit einander verbindet, gemessen werden. Die Winkel, welche die zu diesen Puncten gezogenen Halbmesser $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ mit der gemeinschaftlichen Tangente der Curven darstellen, sind ebenfalls unendlich klein, daher kann diess auch von dem Winkel ω, unter welchem diese Halbmesser gegen einander geneigt sind, gesagt werden. Das zwischen den beiden Curven enthaltene Stücke eines grössten Kreises auf der

$$\text{Kugel ist} = i\omega$$

$$\text{und die Sehne desselben} = 2i \sin \frac{\omega}{2}$$

Hier ist ω eine gewisse, von der Beschaffenheit der beiden Curven abhängende Function der unendlich kleinen Grösse i. Aendern diese Curven, sich fortwährend berührend, ihre Gestalten dermassen, dass sie sich in der Gegend des Berührungspunctes mehr nähern, oder sich weiter von einander entfernen, so vergrössern oder verkleinern sich die zu einem und demselben i gehörenden Werthe von ω. Aber hinsichtlich des unendlichen Abnehmens von i fallen die kleinsten Werthe von ω wie oben (A, 5) gezeigt worden ist, um so geringer aus, je mehr der Ordnungsexponent beträgt, welchen ω als eine unendlich kleine Grösse in dem auf die Basis i gegründeten Systeme erhält, daher kann man füglich die Ordnung der Berührung der erwähnten zwei Curven durch die Ordnung der als Function der Basis i betrachteten unendlich kleinen Grösse ω andeuten.

Es soll demnach hier die Ordnung der Berührung zweier Curven durch die Ordnungszahl des unendlich kleinen Winkels ausgedrückt werden, welchen die aus dem

Berührungspuncte zu zweien in diesen Curven von ersterem gleichweit abstehenden Puncten geführten Radienvectoren mit einander bilden, vorausgesetzt, dass die gemeinshaftliche Grösse dieser Radien die Basis des Systems ist; auf welche man alle unendlich kleinen Grössen bezieht.

14.

Es sey nun mit Beibehaltung aller oben angenommenen Benennungen a der Ordnungsexponent von ω im Systeme, welches i zur Basis hat, so ist wegen

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} \omega} = 1$$ das Product

$$\omega . \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} = 2 \sin \frac{\omega}{2}$$

gleichfalls ein unendlich Kleines von der Ordnung a, hingegen sind nach 7.

$$i\omega \text{ und } 2 i \sin \frac{\omega}{2}$$

unendlich kleine Grössen von der Ordnung $a + 1$.

Die Ordnung der Berührung zweier Curven ist demnach um eine Einheit geringer, als die Ordnung der gegenseitigen Entfernung zweier in diesen Curven gleichweit vom Berührungspuncte angenommenen Puncte, in dem Systeme, in welchem der Abstand jedes der letztern Puncte vom Berührungspuncte zur ersten Ordnung gehört.

15.

Betrachten wir nun insbesondere zwei sich berührende ebene Curven. Durch die auf denselben befind-

lichen gleichweit und unendlich wenig vom Berührungspuncte (P) entfernten Puncte (Q), (R) seyen zwei parallele gerade Linien gezogen, welche der gemeinschaftlichen Tangente der Curven unter einem bestimmten endlichen Winkel δ begegnen, und wovon eine, z. B. die durch den Punct (Q) gehende, dem Puncte (P) näher liegen wird, als die andere. Diese letztere Gerade schneide die Curve worauf der Punct (R) erscheint, in (S.) Da die Puncte (R), (S) unendlich wenig von (P) entfernt sind, so ist $\overline{RS}$ gegen die gemeinschaftliche Tangente der Curven unter einem unendlich kleinen Winkel geneigt und bildet desshalb mit $\overline{QR}$, $\overline{QS}$ endliche Winkel, wovon der erstere unendlich wenig von einem Rechten, und der andere unendlich wenig von δ abweicht. Bezeichnen wir nun durch ζ, λ unendlich kleine Grössen, so gibt uns das Dreieck QRS

$$\overline{QS} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \zeta\right)}{\sin\left(\delta + \lambda\right)} \cdot \overline{QR} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \zeta\right)}{\sin\left(\delta + \lambda\right)} \cdot 2\,i \sin\frac{\omega}{2}$$

Das aus (P) auf die Richtung von $\overline{QS}$ gefällte Perpendickel $\overline{PV}$ ist ferner unendlich wenig von dem Producte

$$\overline{PQ}.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = i \sin\delta$$

verschieden, und man kann daher, wenn ε eine unendlich kleine Grösse anzeigt,

$$PV = i\,(\sin\delta + \varepsilon)$$

setzen. Ist i ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, so ist es auch $\overline{PV}$; stehen ferner die beiden Curven in einer Berührung der Ordnung a, so gehört $\overline{QS}$ zur Ordnung a + 1 und ändert diesen Ordnungs-

exponenten nicht, wenn man $\overline{PV}$ als die Basis des Systems aller unendlich kleinen Grössen betrachtet.

Wird also zu zwei sich berührenden ebenen Curven eine dem Berührungspuncte unendlich nahe, und der gemeinschaftlichen Tangente nicht parallele Secante gezogen, so ist die Ordnung der Berührung um eine Einheit geringer, als die Ordnung des zwischen den Curven enthaltenen Stückes der Secante, vorausgesetzt, dass die Entfernung derselben vom Berührungspuncte zur ersten Ordnung gehört.

16.

Werden die zwei ebenen Curven auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, und ist ihre gemeinschaftliche Tangente der Achse der y nicht parallel, so bestimme man die Ordnung des zwischen ihnen enthaltenen Stückes einer dem Berührungspuncte unendlich nahen Ordinate, indem man die Entfernung der Ordinate von diesem Puncte als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ansieht. Der Exponent dieser Ordnung um 1 vermindert, zeigt die Ordnung der Berührung der Curven an.

Sind also $y = f(x)$, $y = F(x)$ die Gleichungen zweier ebenen Curven, und ist für einen bestimmten Werth von x für welchen $f(x)$, $F(x)$ nicht unendlich werden, sowohl

$$f(x) = F(x)$$

$$\text{als auch } \frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$$

so berühren sich die Curven in dem Puncte dessen Abscisse durch den genannten Werth von x angezeigt wird, und erhalten die beiden Glieder der zweiten Gleichung ebenfalls endliche Werthe, so ist die Abscisse x entsprechende gemeinschaftliche Tangente der Curven der Achse den y nicht parallel. Zeigt nun i eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung an, so ist die Ordnung der Differenz

$$F(x+i) - f(x+i)$$

um eine Einheit höher, als jene der Berührung der Curven.

Berühren sich die Curven, von welchen so eben die Rede war: in einem Puncte der Achse der y selbst, ohne diese Achse zur gemeinschaftlichen Tangente zu haben, so gibt die Ordnung der Grösse

$$F(i) - f(i)$$

in so fern i von der ersten Ordnung ist, um die Einheit vermindert, die Ordnung der Curven an.

Auf diese Art findet man dass die Parabeln

$$y = x^2, \quad y = x^3$$

in dem Anfangspuncte in einer Berührung der ersten Ordnung und im Allgemeinen die Curven

$$y = x^{n+1}, \quad y = x^{n+2}$$

in einer Berührung der Ordnuug n stehen; die Berührung der Curven

$$y = x^{\frac{4}{3}}, \quad y = x^{\frac{5}{4}}$$

hingegen zur Ordnung $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ gehört.

17.

Es sey x die Abscisse des Punctes, in welchem zwei ebene Curven $F(x) = o$, $f(x) = o$ in einer Berüh-

rung der Ordnung a stehen, so zwar, dass ihre gemeinschaftliche Tangente der Achse der y nicht parallel lauft. Bestimmen wir nun die ganze Zahl n so, dass n nicht kleiner ist, als a und n — a kleiner als die Einheit ausfällt, so muss, weil hier

$$F(x+i) - f(x+i),$$

in so fern i eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung bedeutet, ein unendlich Kleines der Ordnung a + 1 ist,

$$\frac{d^{n+1}F(x+i)}{di^{n+1}} - \frac{d^{n+1}f(x+i)}{di^{n+1}}$$

oder was dasselbe heisst,

$$\frac{d^{n+1}F(x+i)}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}f(x+i)}{dx^{n+1}}$$

das erste Glied der Reihe

$$F(x+i) - f(x+i),\ \frac{dF(x+i)}{dx} - \frac{df(x+i)}{dx},$$

$$\frac{d^2F(x+i)}{dx^2} - \frac{d^2f(x+i)}{dx^2} \text{ etc. } \ldots$$

seyn, welches für i = o nicht verschwindet. Es entstehen demnach, unter der Voraussetzung einer Berührung von der Ordnung a, die Gleichungen

$$F(x) = fx),\ \frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

$$\ldots\ldots \frac{dx^nF(x)}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

ein Resultat, welches, wenn a selbst eine ganze Zahl, also n = a ist, mit der von Lagrange gegebenen Regel übereinstimmt.

18.

Hat die gemeinschaftliche Tangente zweier Curven, zwischen welchen eine Berührung der Ordnung a Statt findet, eine der Achse der y parallele Lage, so ist, wenn die obigen Bezeichnungen fort gelten,

$$F(x+i) - f(x+i)$$

nicht immer ein unendlich Kleines der Ordnung $a+1$. Indessen kann man die Ordnung der Berührung auch in diesem Falle nach der oben erklärten Methode ausmitteln, wenn man nur die Achsen der x und y mit einander verwechselt. So geben die Gleichungen

$$y = x^{\frac{3}{5}}, \quad y = x^{\frac{3}{4}},$$

welche zwei im Anfangspuncte die Achse der y berührenden Curven vorstellen,

$$x = y^{\frac{5}{3}}, \quad x = y^{\frac{4}{3}}$$

Die Differenz $(y+i)^{\frac{4}{3}} - (y+i)^{\frac{5}{3}}$ ist ein unendlich Kleines der Ordnung $\frac{4}{3}$, wenn i zur ersten Ordnung gezählt wird, daher ist die Ordnung der Berührung $= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.

Die Differenz $(x+i)^{\frac{3}{5}} - (x+i)^{\frac{3}{4}}$ stellt in diesem Falle auch eine unendlich kleine Grösse dar, welche aber nicht zur Ordnung $\frac{4}{3}$ sondern nur zur Ordnung $\frac{5}{3}$ gehört.

19.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des allgemeinen Falles, wenn die im Puncte (P) sich berührenden Curven von doppelter Krümmung sind. Werden auf diesen Curven die Puncte (Q), (R) so gewählt, dass $\overline{PQ} = \overline{PR} = i$ unendlich klein ist, und projicirt man das Dreieck PQR auf eine Ebene, welche

jener des Dreieckes unter keinem rechten Winkel begegnet, stellt man ferner durch ω den in Bezug auf die Basis i zur Ordnung a gehörenden unendlich kleinen Winkel der Geraden $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$; durch (p), (q), (r) die Projectionen der Puncte (P), (Q), (R); durch δ den Neigungswinkel der Ebenen PQR, pqr, endlich durch φ, χ, ψ die Winkel vor, welche die Geraden $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{QR}$ mit ihren Projectionen $\overline{pq}$, $\overline{pr}$, $\overline{qr}$ bilden, so hat man

$$\overline{pq} = \overline{PQ} \cos\varphi = i \cos\varphi,\ \overline{pr} = \overline{PR} \cos\chi = i \cos\chi$$

$$\overline{pr} = QR \cos\psi = 2 i \sin \frac{\omega}{2}. \cos\psi$$

$$pqr = PQR \cos\delta = \tfrac{1}{2} i^2 \sin\omega \cos\delta = \tfrac{1}{2} i^2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \cos\delta:$$

es ist daher die Länge des aus dem Puncte (p) auf die Gerade $\overline{qr}$ gefällten Perpendikels oder der Quotient

$$\frac{2pqr}{\overline{qr}} = i \frac{\cos\frac{1}{2}\omega . \cos\delta}{\cos\psi}$$

Da nun ω unendlich klein ist, die Unterschiede $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, $\frac{1}{2}\pi - \chi$, $\frac{1}{2}\pi - \psi$ es hingegen nicht sind, so besitzen die Grössen

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega,\ \cos\delta,\ \cos\chi,\ \cos\psi$$

angebbare Werthe, und daher ist 1. $\overline{qr}$ unter den obigen Voraussetzungen eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $a + 1$, und bildet mit $\overline{pq}$ einen endlichen Winkel, 2. $\overline{qr}$ ein unendlich Kleines der ersten Ordnung. Die zum Puncte (p) geführte Tangente der Projectionen beider Curven auf die Ebene des Dreieckes pqr nähert sich der $\overline{pq}$ unendlich und ist desshalb gegen die Secante $\overline{qr}$ unter einem endlichen Winkel geneigt. Es findet also sowohl zwischen den gegebenen Curven, als auch zwischen ihren Projectionen eine Berührung derselben Ordnung a Statt.

20.

Wäre die Ebene des Dreieckes pqr merklich senkrecht auf jene des Dreieckes PQR, ohne jedoch gegen die Geraden $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ und folglich auch gegen die Tangente der beiden gegebenen Curven unter einem verschwindenden Winkel geneigt zu seyn, so könnte die Ordnung der Berührung der Projectionen dieser Curven zu keiner niedrigeren Ordnung gehören, als die Berührung der Curven selbst. In der That wären in diesem Falle $\overline{pq}$, $\overline{pr}$ unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung, $\overline{qr}$ hingegen ein unendlich Kleines der Ordnung $a + 1$, oder einer höheren. Nimmt man nun auf der Projection, welche (r) enthält, den Punct (s) so an, dass $\overline{ps} = \overline{pq}$ ist, so hat $\overline{rs}$ eine zur gemeinschaftlichen Tangente der projicirten Curven beinahe parallele Lage, $\overline{qr}$ aber steht auf dieser Tangente beinahe senkrecht; das Dreieck $\overline{qrs}$ ist daher beinahe rechtwinklig in (s), und $\overline{qs}$, oder das Product von $\overline{qr}$ mit dem Cosinus des Winkels (rqs), so wie qr selbst, ein unendlich Kleines von der Ordnung $a + 1$ oder von einer noch höheren, wodurch obige Behauptung gerechtiget erscheint.

21.

Projiciren wir nun die beiden einander berührenden Curven auf die Ebenen xy und xz eines rechtwinkligen oder auch schiefwinkligen Coordinatensystems, und setzen wir dabei voraus, der Winkel, unter welchem die gemeinschaftliche Tangente der Curven gegen die Achse der x geneigt ist, sey von einem Rechten um eine endliche Grösse unterschieden, so kann diese Tangente weder auf die Ebene xy

noch auf die Ebene xz senkrecht stehen, und daher können die genannten zwei coordinirten Ebenen nicht zugleich mit der Ebene des Dreieckes PQR rechte Winkel darstellen. Es wird demnach keine der Berührungen der Projectionen der Curven auf die Ebenen xy und xz zu einer geringeren Ordnung gehören, als die Berührung der Curven im Raume selbst.

Hiedurch wird die Bestimmung der Ordnung der Berührung zweier Curven im Raum, deren gemeinschaftliche Tangente mit der Achse der x keinen rechten Winkel bildet, auf die Bestimmung der Ordnungen der Berührung ihrer Projectionen in den Ebenen xy, xz zurückgeführt. Der gemeinschaftliche Werth der gefundenen Ordnungszahlen, oder wenn sie ungleich sind, die kleinere derselben, zeigt die Ordnung der Berührung der Curven im Raume an.

Auch ist nun, nach dem, was über die Berührung ebener Curven in (17) gesagt wurde, leicht einzusehen, welcher Gebrauch von der Vergleichung der auf die Abscisse des Berührungspunctes sich beziehenden Werthe der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \ldots \frac{d^2z}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \ldots \ldots$$

für beide Curven zur Bestimmung der Ordnung ihrer Berührung gemacht werden könne.

Bildet die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven mit der Achse der x einen rechten Winkel, so kann sie nicht zugleich auf jene der y und z senkrecht stehen. Man wird daher in diesem Falle bei der Anwendung der obigen Methode an die Stelle der Achse x eine Achse treten lassen, welcher die erwähnte Tangente nicht nur unter einem rechten Winkel begegnet.

22.

Betrachten wir gegenwärtig zwei in einem Puncte sich berührende Flächen. Eine durch denselben gelegte Normalebene schneidet diese Flächen in Curven, zwischen welchen ebenfalls Berührung Statt findet, und deren Gestalt und Lage, sobald man die Normalebene um die Normale sich drehen lässt, im Allgemeinen einem fortwährenden Wechsel unterliegt. Die Zahl, welche die Ordnung der Berührung zwischen diesen zwei Curven angibt, kann dabei nach Beschaffenheit der Umstände ungeändert bleiben, oder auch sich verändern. Man wird die Ordnung der Berührung der Flächen selbst füglich durch den kleinsten Werth der so eben genannten Ordnungszahl für alle Positionen der Normalebene angeben. Diess vorausgesetzt, gelangt man durch dieselben Schlüsse, welche uns in 15 leiteten, zu folgendem Satze:

Die Ordnung der Berührung zweier in einem Puncte sich begegnenden Flächen ist um 1 geringer, als der kleinste Werth der Ordnungszahl des zwischen den Flächen enthaltenen Stückes einer Secante, welche gegen die gemeinschaftliche Berührungsebene der Flächen unter einem nicht verschwindenden Winkel geneigt ist, sobald man die Entfernung der Secante vom Berührungspuncte als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ansieht.

23.

Bezieht man die sich berührenden Flächen auf drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z, und ist die

gemeinschaftliche tangirende Ebene derselben der Achse der z nicht parallel, so kann man eine dem Berührungspuncte unendlich nahe der Achse der z parallele Ordinate für die erwähnte Secante nehmen.

Es seyen nun $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ die Gleichungen der sich berührenden Flächen, x, y, z die Cordinaten ihres Berührungspunctes, so müssen, da die Flächen den Punct x, y, z und die demselben gehörige tangirende Ebene gemeinschaftlich besitzen, die Gleichungen

$$f(x, z) = F(x, y)$$

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{dF(x, y)}{dx}, \quad \frac{df(x, y)}{dy} = \frac{dF(x, y)}{dy}$$

Statt finden. Der allgemeine Ausdruck des von beiden Flächen begrenzten Stückes einer der Achse der z parallelen Secante ist

$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

wobei $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ den Abstand dieser Secante von dem Puncte, x, y, z angibt. Lässt man Δx, Δy unendlich klein werden, und betrachtet man $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta^2 y}$ als ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, wozu bloss erforderlich ist, eine der Grössen Δx, Δy selbst für ein unendlich Kleines dieser Ordnung anzunehmen, so erhält man die Ordnungszahl der Berührung, in welcher die gegebenen Flächen stehen, wenn man die Ordnungszahl der Grösse

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

um die Einheit vermindert.

Man setze $\Delta x = i\xi$, $\Delta y = i\upsilon$, wobei ξ, υ beliebige endliche Grössen sind, und i eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung anzeigt, ferner sey

$$F(x + i\xi, y + i\upsilon) - f(x + i\xi, y + i\upsilon) = \psi(i)$$

so ist, wenn $\psi(i)$ in Bezug auf die Basis i zur Ordnung $a + 1$ gehört, und die ganze Zahl n so gewählt wird, dass $n - a$ nicht negativ erscheint, aber kleiner als 1 ausfällt, $\frac{d^{n+1}\psi(i)}{di^{n+1}}$ das erste Glied der Reihe

$$\psi(i), \frac{d\psi(i)}{di}, \frac{d^2\psi(i)}{di^2}, \frac{d^3\psi(i)}{di^3}, \ldots\ldots$$

welches bei dem unendlichen Abnehmen von i nicht verschwindet. Es be stehen daher, bei der oben angegebenen Bedeutung von i, die Gleichungen

$$\psi(i) = 0, \frac{d\psi(i)}{di} = 0, \frac{d^2\psi(i)}{di^2} = 0, \frac{d^3\psi(i)}{di^3} = 0, \text{ etc.}$$

$$\frac{d^n\psi(i)}{di^n} = 0$$

Sie sind, wie man leicht sieht, mit folgenden Gleichungen einerlei, in welchen der Kürze wegen F statt F (x, y) und f statt f (x, y) steht:

$$F - f = 0, \left(\frac{dF}{dx} - \frac{df}{dx}\right)\xi + \left(\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\right)\upsilon = 0$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx} - \frac{d^2f}{dx^2}\right)\xi^2 + 2\left(\frac{d^2F}{dxdy} - \frac{d^2f}{dxdy}\right)\xi\upsilon +$$

$$\left(\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2f}{dy^3}\right)\upsilon^2 = 0. \text{ u. s. w.}$$

aus welchen nebst den bereits oben angeführten

$$F = f, \frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx}, \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dy} \text{ noch } \frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$\frac{d^2F}{dxdy} = \frac{d^2f}{dxdy}, \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{d^2f}{dy^2}, \text{ u. s. w.}$$

sich ergeben, welche man so lange fortsetzen muss, bis die Ordnung der Differenzialien von F und f die

Zahl n übertrifft. Ist a eine ganze Zahl, also $a = n$, so stimmen diese Resultate mit den von Lagrange gegebenen Lehren überein.

Ist die gemeinschaftliche Berührungsebene beider Flächen mit der Achse der z parallel, so muss man in obigen Betrachtungen z mit einer der Coordinaten x, y verwechseln.

III. Einfacher und strenger Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes.

(Cauchy, Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Addition, p. 161 etc. Exercices de Math. p. 25 etc.)

Lehrsatz. Wenn die Function f (x) so beschaffen ist, dass für einen bestimmten Werth von x die Differenzialquotienten

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x), \quad \frac{df_1(x)}{d} = f_2(x), \quad \frac{df_2(x)}{dx} = f_3(x), \ldots$$

$$\frac{df_{n-2}(x)}{dx^{n-2}} = f_{n-1}(x)$$

sämmtlich verschwinden, so kann man im Allgemeinen für dieses x

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} f_n(x + \xi \Delta x)$$

setzen, wobei das Functionszeichen f_n durch die Gleichung $\frac{df_{n-1}(x)}{dx} = f_n(x)$ bestimmt wird, und ξ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse bedeutet.

Beweis. Nehmen wir die n ersten Differenzialquotienten der Function

$$F(z) = f(x + z) - Az^n.$$

worin A eine beständige Grösse bedeutet, in Bezug auf die Variable z, so finden wir

$$F_1(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f_1(x+z) - nAz^{n-1}$$

$$F_2(z) = \frac{dF_1(z)}{dz} = f_2(x+z) - (n-1)nAz^{n-2}$$

$$F_3(z) = \frac{dF_2(z)}{dz} = f_3(x+z) - (n-2)(n-1)nAz^{n-3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_{n-1}(z) = \frac{dF_{n-2}(z)}{dz} = f_{n-1}(x+z) - 2.3\ldots(n-1)nAz$$

$$F_n(z) = \frac{dF_{n-1}(z)}{dz} = f_n(x+z) - 1.2.3\ldots(n-1)nA$$

Wird x so gewählt, dass $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... bis $f_{n-1}(x)$ der Nulle gleich kommen, so verschwinden für diesen Werth von x offenbar auch $F_1(0)$, $F_2(0)$, $F_3(0)$ ..... $F_{n-1}(0)$.

Es sey nun A der kleinste Werth, dessen der Quotient $\frac{f_n(x)}{1.2.3\ldots n}$ fähig ist, während x, von dem oben erwähnten Werthe angefangen, durch alle denkbaren Zwischenstufen in $x + \triangle x$ übergeht, so ist in Bezug auf jenes specielle x, wie die letzte der obigen Gleichungen zeigt, $F_n(z)$ für alle Werthe der variablen z, von 0 angefangen bis $\triangle x$, positiv. Aber die ersten Begriffe der Differenzialrechnung reichen hin, zu beweisen, dass eine Function, deren Differenzialquotient bei einem individuellen Werthe der veränderlichen Grösse positiv ausfällt, mit diesem Werthe zu-

gleich wächst und mit ihm zugleich abnimmt; nehmen wir nun der leichteren Uebersicht wegen $\triangle x$ positiv an, so ergibt sich die Folgerung, dass $F_{n-1}(z)$ für jenes specielle x, während z von der Nulle angefangen stufenweise bis $\triangle x$ fortschreitet, ununterbrochen wächst, folglich, weil $F_{n-1}(o) = o$ ist, $F_{n-1}(z)$ innerhalb der erwähnten Grenzen der Werthe von z stets positiv bleibt. Dasselbe gilt aus eben diesem Grunde auch von $F_{n-2}(z)$, $F_{n-3}(z)$ u. s. w. bis $F_1(z)$; man ist demnach berechtiget zu schliessen, dass die Function $F(z) = f(x+z) - Az^n$, wenn x den öfter erwähnten besonderen Werth erhält, und z von der Nulle angefangen bis $\triangle x$ wächst, ununterbrochen zunimmt.

Wird nun der erste Werth der Function $F(z)$, nämlich $F(o)$, von dem letzten Werthe $F(\triangle x)$ subtrahirt, so muss eine positive Differenz erfolgen; es ist also, für jenes besondere x,

$$f(x+\triangle x) - f(x) - A\triangle x^n$$

positiv.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass wenn B den grössten Werth vorstellt, welchen der Ausdruck $\frac{f_n(x)}{1.2.3..n}$ annimmt, während x, von dem oben genannten speciellen Werthe angefangen, durch alle Zwischenstufen bis $x+\triangle x$ sich ändert,

$$f(x+\triangle x) - f(x) - B\triangle x^n$$

negativ ausfällt.

Es liegt also $f(x+\triangle x) - f(x)$ zwischen $A\triangle x^n$ und $B\triangle x^n$ oder es ist, wenn K eine zwischen A und B liegende Grösse anzeigt,

$$f(x+\triangle x) - f(x) = K\triangle x^n$$

Geht die Function $f_n(x)$, bei der so eben angeführten Aenderung des x, aus ihrem anfänglichen Zustande in den letzten $f_n(x + \Delta x)$ nach dem Gesetze der Stetigkeit über, so kann man, wenn ε eine, die Einheit nicht übersteigende positive Grösse vorstellt

$$K = \frac{f_n(x + \varepsilon \Delta x)}{1.2.3....n}$$

setzen, daher ist

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{\Delta x^n}{1.2.3...n} f_n(x + \varepsilon \Delta x)$$

Es ist nicht schwer die obigen Schlüsse unter der Voraussetzung, dass Δx einen negativen Werth besitzt, zu wiederholen.

Auf die hier gefundene Gleichung lässt sich die Theorie der grössten und kleinsten Werthe der Functionen, die Bestimmung des Werthes der Bruches $\frac{o}{o}$ u. d. gl. ohne weitere Beihülfe anderer Sätze bauen, so wie sie uns sogleich zur Taylor'schen Formel führen wird.

Setzen wir in dieser Gleichung $x = o$, nehmen wir ferner an, es bestehe nebst $f_1(o) = o$, $f_2(o) = o$..... $f_{n-1}(o) = o$, auch noch die Gleichung $f(o) = o$, so haben wir

$$f(\Delta x) = \frac{\Delta x^n}{1.2.3....n} f_n(\varepsilon \Delta x)$$

Es sey nun $f(\Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$, so haben wir bloss $f(o) = o$, also $n = 1$ und daher

$$(1)\ F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\Delta x}{1} . F_1(x + \varepsilon \Delta x)$$

Setzen wir $F_1(x + \varepsilon \Delta x) = F_1(x) + U_1$

so wird $F(x + \Delta x) - F(x) - \frac{\Delta x}{1} F_1(x) = U_1 \Delta x$

Nehmen wir jetzt $f(\Delta x) = U_1 \Delta x$, an, so bestehen, wie die unmittelbar vorhergehende Gleichung zeigt, die Gleichungen

$$f(o) = o,\ f_1(o) = o;$$ daher ist hier $n = 2$

und somit wegen $f_2(\Delta x) = F_2(x + \Delta x)$.

$$(2)\ F(x+\Delta x) - F(x) - \frac{\Delta x}{1} F_1(x) = \frac{\Delta x^2}{1.2} F_2(x + \varepsilon \Delta x).$$

Lassen wir wieder $F_2(x + \varepsilon \Delta x) = F_5(x) + U_2$ seyn, wodurch

$$F(x + \Delta x) - F(x) - \frac{\Delta x}{1} F_1(x) - \frac{\Delta x_2}{1.2} \quad F_2(x)$$

$$= \frac{U_2 \Delta x}{12}$$

wird, und setzen wir $f(\Delta x) = \frac{U^2 \Delta x^3}{1.2}$, so finden die Gleichungen $f(o)$, $f_1(o)$, $f_2(o)$ Statt, und es ist $n = 3$, also

$$(3)\ F(x + \Delta x) - F(x) - \frac{\Delta x}{1} F_1(x)$$

$$- \frac{\Delta x_2}{1.2} F_2(y) = \frac{\Delta x^3}{1.2.3} F_3(x + \varepsilon \Delta x)$$

Der weitere Verlauf der Rechnung fällt nunmehr leicht in die Augen. Im Allgemeinen ist

$$F(x+\Delta x) - F(x) - \frac{\Delta x}{1} F_1(x) - \frac{\Delta x^2}{1.2} F_2(x) - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F_{n-1}(x) = \frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} F_n(x + \varepsilon \Delta x)$$

also

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{\Delta x}{1} F_1(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} F_2(x) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2\ldots n-1} F_{n-1}(x) + \frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} F_n(x + \varepsilon \Delta x)$$

welches die Taylors'che Formel ist. Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, dass ε in den Gleichungen (1), (2), (3) etc. nicht die nämliche Grösse besitzt. Die hier gegebene Entwicklung verschafft zugleich eine Kenntniss der Form der Ergänzung der Taylor'schen Reihe, deren man bedarf, wenn man diese Reihe bei irgend einem Gliede abbrechen will.

